Math. P 61-2

Börja

Mathesis. Geometria Specialis

293.

R

Erleichterter

Unterricht

in der

höheren Meßkunst,

oder

deutliche Anweisung

zur

Geometrie der krummen Linien.

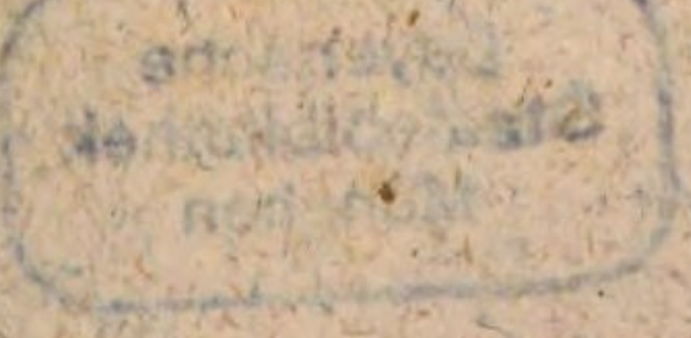
Von

Abel Bürja,

Prediger bei der französischen Friedrichstädtschen Gemeine in Berlin, und Professor der Mathematik bei der Königlichen Ritter-Akademie daselbst.

Zweiter Band.

Berlin und Libau,
bei Lagarde und Friedrich.
1788.



Bayerische
Staatsbibliothek
München

Eilftes Hauptstück.

Von der Grösse der krummen Linien, wie auch der daraus entstehenden Flächen und Körper, alles für rechtwinkliche Koordinaten.

§. 1.

Bisher haben wir nur den Lauf oder den Gang der krummen Linien bestimmet. Die Tangenten haben uns zu erkennen gegeben, wie jeder sehr kleine Theil einer krummen Linie gegen die Direktrize geneiget ist, da nemlich ein solcher Theil einem Stücke der Tangente sehr nahe kömmt. Die Halbmesser der Krümmung gaben uns ein Mittel um zu erfahren, wie die kleinen Theile einer krummen Linie mehr oder weniger gebogen sind, da sie nicht nur einer Seits die Tangenten, sondern auch ander Seits kleine Stücke der küssenden Zirkel zu Gränzen haben. Die Betrachtung der merkwürdigen Punkte in einer krummen Linie lehrte uns näher die ganze Gestalt derselben bestimmen, wie weit sie sich von der Direktrize entfernen, wo die Abzissen anfangen und aufhören, wo die Linien anfangen sich anderes Sinnes zu biegen, wo ihre Theile einander schneiden.

Nun aber betrachten wir nicht mehr bloß das äusserliche Ansehen der krummen Linien, sondern ihre Größe selbst, und suchen erstlich zu bestimmen wie ihre Länge

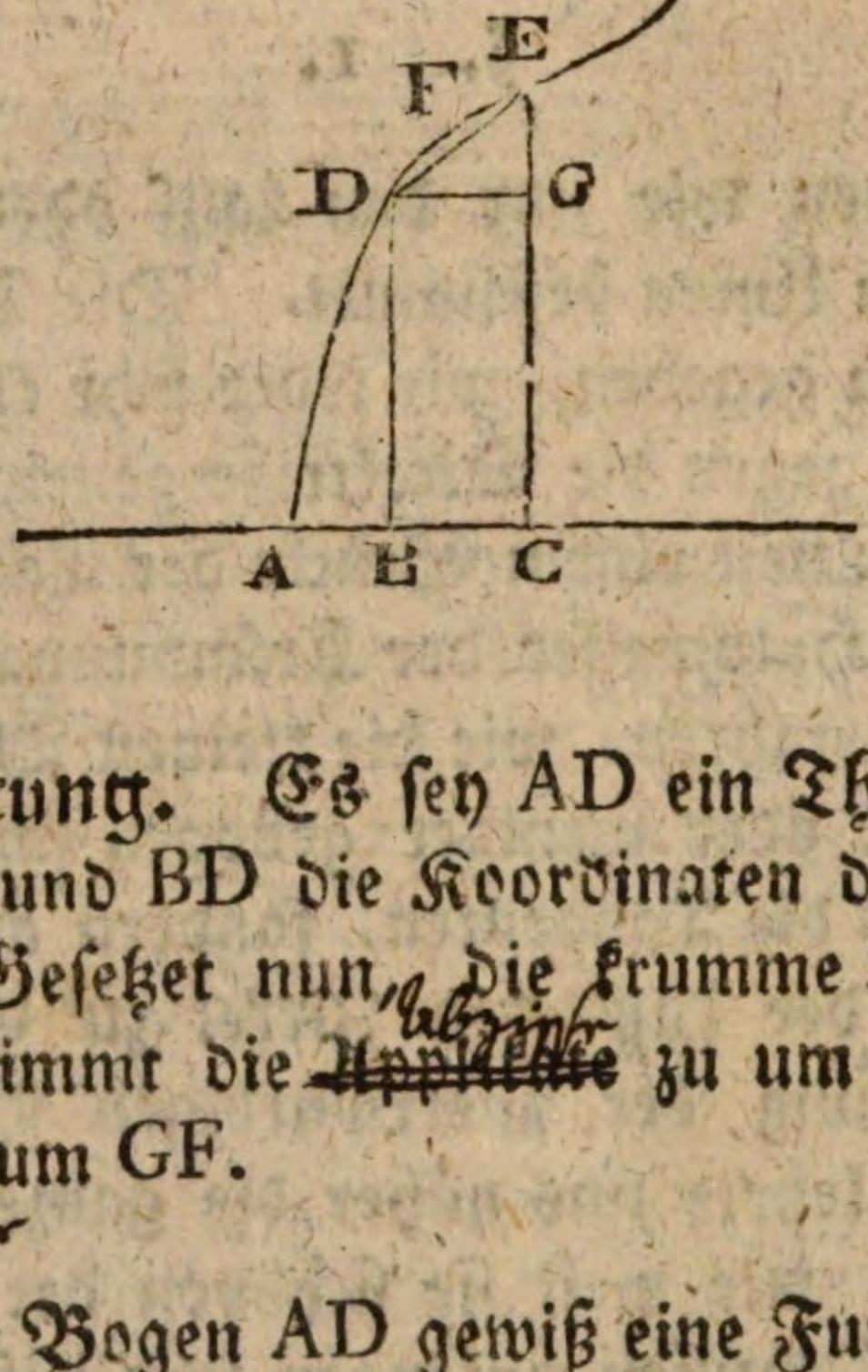
berechnet werden kann, so daß nöthigenfalls eine gerade Linie von gleicher Länge gemacht werden könne.

Diese Berechnung der Länge einer krummen Linie, wird die Rektifikazion derselben genannt, welches Wort eigentlich das Grademachen bedeutet.

§. 2.

Aufgabe.

Eine ~~gerade~~ krumme Linie rektifiziren, oder deren Länge berechnen.



Vorbereitung. Es sey AD ein Theil einer krummen Linie, AB und BD die Koordinaten die diesen Theil bestimmen. Gesetzet nun, die krumme Linie nehme zu um DFE, so nimmt die ~~Applikate~~ zu um BC oder DG, und die ~~Abseisse~~ um GF.

Nun ist der Bogen AD gewiß eine Funkzion von AB und BD oder x und y, weil die Größe des Bogens von der Grösse dieser Koordinaten abhängt. Folglich wird der Zuwachs des Bogens auch von den Zuwächsen der Koordinaten abhängen. Das ist, DFE muß eine Funkzion seyn von DG und GE. Oder ΔAD ist eine Funkzion von Δx und Δy.

Die

Die Gränze von DFE ist die gerade DE, weil nemlich beide Linien, wenn sie sehr klein werden, sich immer mehr und mehr einander nähern. Weil also DEE = △AD, so wird DE, wenn sie immer kleiner und kleiner wird, ausgedrücket durch ∂AD. Die Gränze von DG oder Δx wird durch dx, und die Gränze von GE oder Δy durch dy vorgestellet.

Nun ist

$$DE = \sqrt{(DG^2 + GE^2)}$$

folglich, wenn diese Linien immer kleiner und kleiner werden, so ist

$$\partial AD = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Da nun aus der Gleichung der krummen Linie das Verhältniß zwischen x und y bekannt ist, so kann daraus $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ in einer Funkzion von x und dx, oder von y und dy, gefunden werden.

Diese Funkzionen, wenn sie gefunden worden, drücken also die Gränze der DFE, oder die Gränze der Zunahme von AD, oder das Differenzial von AD aus, welche AD eine Funkzion von x oder von y ist.

Wenn das Differenzial einer Funkzion bekannt ist, so kann vermittelst der Integral Rechnung die Funkzion selbst gefunden werden. Also läßt sich die Funkzion von x oder y finden die den Bogen AD ausdrücket.

So bald also die Koordinaten AB, BD, oder eine von beiden, nebst der Gleichung der krummen Linie gegeben sind, so kann man die Länge des Bogens AD finden.

Auflösung.

Es sey x die Abzisse, y die Applikate, z der Bogen der durch beide bestimmet wird, so ist

$$dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Man suche, aus der Gleichung der krummen Linie, dy in einer Funkzion von x und dx, oder dx in einer Funkzion von y und dy. Man substituire die gefundene Funkzion in die Formel. Man verkürze den Ausdruck der Formel so viel als möglich. Man integrire. So drücket das gefundene Integral den Bogen aus, der durch x oder y bestimmet wird.

Wenn das Integriren nicht anders angehen will, so entwickele man den gefundenen Werth von $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ in eine unendliche Reihe, und integrire die Sätze derselben. So kömmt wiederum eine unendliche Reihe, welche durch Näherung den Bogen ausdrücket.

Exempel I. Es sey zu rektifiziren eine Linie, worin $y^3 = ax^2$, welche eine Art von Parabel seyn wird, und es werde der Bogen in einer Funkzion der Applikate y verlanget.

$$\text{Weil } ax^2 = y^3$$
$$\text{oder } x^2 = a^{-1} y^3$$
$$\text{oder } x = a^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{so ist } dx = \frac{3}{2} a^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$dx^2 = \frac{9}{4} a^{-1} y\, dy^2$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{9}{4} a^{-1} y\, dy^2 + dy^2$$

$$= \left(\frac{9}{4} a^{-1} y + 1\right) dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(\frac{9}{4} a^{-1} y + 1\right)}$$

Um

Um dieses Differenzial zu integriren, setze man

$$\frac{9}{4} a^{-1} y + 1 = u$$

so ist $\frac{9}{4} a^{-1} y = u - 1$

$$y = \frac{4}{9} au - \frac{4}{9} a$$

$$dy = \frac{4}{9} a du$$

Nun setze man die Werthe von y und dy in das zu integrirende Differenzial, so kömmt

anstatt $dy \sqrt{\left(\frac{9}{4} a^{-1} + 1\right)}$

dieses; $\frac{4}{9} a du \sqrt{u}$

oder $\frac{4}{9} a u^{\frac{1}{2}} du$

das Integral ist $\frac{\frac{4}{9} a u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$

oder $\frac{\frac{4}{9} a u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

oder $\frac{8a}{27} u^{\frac{3}{2}} + C$

Anstatt u setze man wiederum dessen Werth, nemlich $\frac{9}{4}a^{-1}y+1$, so kömmt

$$\frac{8a}{27}\left(\frac{9}{4}a^{-1}y+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

oder $$\frac{8a}{27}\left(\frac{9y}{4a}+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

Um die beständige Größe C zu bestimmen, kömmt es darauf an, daß man entscheide, von wo an der Bogen gerechnet werden soll. Soll es, wie gewöhnlich, vom Ursprunge der Applikaten an geschehen, wo $y = o$, so muß der Bogen $= o$ werden, wenn $y = o$. In diesem Falle ist

$$\frac{8a}{27}(o+1)^{\frac{3}{2}}+C = o$$

oder . . . . $$\frac{8a}{27}+C = o$$

folglich . . . . . $$C = -\frac{8a}{27}$$

Also ist das vollständige Integral

$$\frac{8a}{27}\left(\frac{9y}{4a}+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8a}{27}$$

welcher Ausdruck also die Größe des Bogens anzeiget der durch die Applikaten y bestimmet wird, in einer krummen Linie deren Gleichung ist $y^3 = ax^2$.

Sollte der Bogen nicht vom Ursprunge der Applikaten an, sondern von einem andern Orte, z. E. von der Stelle wo $y = a$ gerechnet werden, so müste $y = a$, den Bogen zu o machen. Setzet man also a anstatt y in das Integral,

tegral, und das ganze Integral = o, so kömt $\frac{8a}{27}\left(\frac{9}{4}+1\right)^{\frac{3}{2}}$

$+C=o$, daher $C=-\frac{(13)^{\frac{3}{2}}a}{27}$, und der Bogen $\frac{8a}{27}$

$\left(\frac{9y}{4a}+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{(13)^{\frac{3}{2}}a}{27}$

Exempel II. In der gemeinen Parabel ist

$$ax=y^2$$

$$x=a^{-1}y^2$$

$$\delta x=2a^{-1}y\,\delta y$$

$$\delta x^2=4a^{-2}y^2\,\delta y^2$$

$$\delta x^2+\delta y^2=4a^{-2}y^2\,\delta y^2+\delta y^2$$

$$\delta x^2+\delta y^2=(4a^{-1}y^2+1)\,\delta y^2$$

$$\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}=\delta y\sqrt{(4a^{-2}y^2+1)}$$

Dieses Differenzial läßt sich nicht wie das vorhergehende vermittelst eines endlichen Ausdruckes integriren. Man wird sich also mit einer Näherung begnügen müssen. Man entwickele nach der Newtonischen Regel den Ausdruck $\sqrt{(4a^{-2}y^2+1)}$ oder $(4a^{-2}y^2+1)^{\frac{1}{2}}$ oder $(1+4a^{-2}y^2)^{\frac{1}{2}}$, so kömmt

$$\sqrt{(1+4a^{-2}y^2)}=1+2a^{-2}y^2-2a^{-4}y^4+4a^{-6}y^6-10\,a^{-8}y^8+\&c.$$

Also ist

$$\delta y\sqrt{(1+4a^{-2}y^2)}=\delta y+2a^{-2}y^2\delta y-2a^{-4}y^4\delta y+4a^{-6}y^6\delta y-10\,a^{-8}y^8\delta y+\&c.$$

Integriret man nun Satz für Satz, und setzet die beständige Größe C dazu, so kömmt

$$\int dy \sqrt{(1+4a^{-2}y^2)} = y + \tfrac{2}{3}a^{-2}y^3 - \tfrac{2}{5}a^{-4}y^5 + \tfrac{4}{7}a^{-6}y^7 - \tfrac{10}{9}a^{-8}y^9 + \&c. + C$$

oder

$$\int dy \sqrt{(1+4a^{-2}y^2)} = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} + \&c. + C$$

Soll der Bogen $= o$ werden, wenn $y = o$, so wird auch $C = o$, und die unendliche Reihe drücket den Bogen in einer Funkzion der Applikate aus.

Exempel III. Die Gleichung für alle Ordnungen der Parabeln ist $y^m = a^{m-n} x^n$

oder $a^{-(m-n)} y^m = x^n$

$$a^{\frac{-(m-n)}{n}} y^{\frac{m}{n}} = x$$

Wir wollen, der Kürze halben, annehmen $a^{\frac{-(m-n)}{n}} = b$, so haben wir $x = b\, y^{\frac{m}{n}}$

daher $\delta x = \frac{m}{n} . b . y^{\frac{m}{n}-1} \delta y$

oder $\delta x = \frac{m}{n} . b\, y^{\frac{m-n}{n}} \delta y$

und $\delta x^2 = \frac{m^2}{n^2} . b^2 y^{\frac{2m-2n}{n}} \delta y^2$

$$(\delta x^2 + \delta y^2) = \delta y^2 \left(1 + \frac{m^2}{n^2} b^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}\right)$$

$$\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \delta y \sqrt{\left(1 + \frac{m^2}{n^2} b^2 y^{\frac{2m-2n}{n}}\right)}$$

Es sey wiederum der Kürze halben $\frac{m^2}{n^2} b^2 = f$, und $\frac{2m-2n}{n} = r$, so ist

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial y \sqrt{(1 + f y^r)}$$

Nun sey ferner

$$f y^r + 1 = u$$

so ist $f y^r \ldots = u - 1$

$$y^r \ldots = \frac{u-1}{f}$$

$$y \ldots = \frac{(u-1)^{\frac{1}{r}}}{f^{\frac{1}{r}}}$$

$$\partial y = \frac{\frac{1}{r}(u-1)^{\frac{1}{r}-1}\,\partial u}{f^{\frac{1}{r}}} = \frac{(u-1)^{\frac{1}{r}-1}\,\partial u}{r.f^{\frac{1}{r}}}$$

Setzet man nun diesen Werth von ∂y, und $u^{\frac{1}{2}}$ anstatt $\sqrt{(1+fy^r)}$ oder $(1+fy^r)^{\frac{1}{2}}$ in die Funkzion $\partial y \sqrt{(1+fy^r)}$, so kömmt

$$\frac{(u-1)^{\frac{1}{r}-1}\,\partial u}{r.f^{\frac{1}{r}}} \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

oder $$\frac{u^{\frac{1}{2}}(u-1)^{\frac{1}{r}-1}\,\partial u}{r.f^{\frac{1}{r}}}$$

Ist nun $\frac{1}{r} - 1$ eine ganze und positive Zahl, oder $\frac{1}{r} - 1 = 0$, so ist $(u - 1)^{\frac{1}{r}-1}$ eine razionale Potenz, und das Differenzial ist leicht zu integriren. Es war aber angenommen

$$r = \frac{2m - 2n}{n = 1}$$

daher $$\frac{1}{r} = \frac{1 - n}{2m - 2n}$$

und $$\frac{1}{r} - 1 = \frac{n}{2(m - n)} - 1$$

Also muß $\frac{n}{2(m-n)} - 1$ eine ganze und positive Zahl seyn, folglich muß ebenfalls $\frac{n}{2(m-n)}$ eine ganze und positive Zahl seyn. Wenn die Exponenten m und n in der Gleichung $y^m = a^{m-n} x^n$ so beschaffen sind, so läßt sich die krumme Linie rektifiziren. Dieses traf ein beim ersten Exempel, denn da war $m = 3$, $n = 2$, folglich $m - n = 1$, $2(m-n) = 2$, also $\frac{n}{2(m-n)} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0$, welche Null als eine ganze positive Zahl angesehen wird.

Hingegen, im zweiten Exempel, war für die gemeine Parabel $m = 2$, $n = 1$, folglich $2(m-n) = 2$, also $\frac{n}{m-n} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Deswegen ließ sich die Differenzial-Funkzion nicht integriren.

Exempel *IV.* Es sey die Rektifikazion des Zirkels verlanget. In demselben ist

$$2ax - x^2 = y^2$$

daher $2a\delta x - 2x\delta x = 2y\delta y$

$$a\delta x - x\delta x = y\delta y$$

$$(a - x)\delta x = y\delta y$$

$$\delta x = \frac{y\delta y}{a - x}$$

$$\delta x^2 = \frac{y^2\delta y^2}{a^2 - 2ax + x^2}$$

$$\delta x^2 = \frac{y^2\delta y^2}{a^2 - (2ax - x^2)}$$

$$\delta x^2 = \frac{y^2\delta y^2}{a^2 - y^2}$$

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \frac{y^2\delta y^2}{a^2 - y^2} + \delta y^2$$

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \frac{y^2\delta y^2 + a^2\delta y^2 - y^2\delta y^2}{a^2 - y^2}$$

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \frac{a^2\delta y^2}{a^2 - y^2}$$

$$\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \delta y\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \frac{a\delta y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = a\delta y(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Man entwickele vermöge der Newtonischen Regel die Irrazional: Größe $(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$ so kömmt

$$(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} + \frac{1}{2}\,.\,a^{-3}y^2 + \frac{3}{2.4}\,.a^{-5}y^4$$

$$+ \frac{3.5}{2.4.6}\,.\,a^{-7}\,y^6 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\,.\,a^{-9}y^8 + \&c.$$

also ist

$$a\partial y(a^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} = \partial y + \frac{1}{2}a^{-2}y^2\,\partial y + \frac{3}{2.4}a^{-4}y^4\partial y$$

$$+ \frac{3.5}{2.4.6}\,.\,a^{-6}y^6\,\partial y + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\,.a^{-8}y^8\,\partial y$$

$$+ \quad \&c.$$

Man integrire alle Sätze, so kömmt

$$y + \frac{1}{2.3}\,.\,a^{-2}\,y^3 + \frac{3}{2.4.5}\,a^{-4}y^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7}\,a^{-6}y^7$$

$$+ \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\,.\,a^{-8}\,y^9 + \quad \&c,$$

oder

$$y + \frac{1}{2.3}\,.\,\frac{y^3}{a^2} + \frac{3.}{2.4.5}\,.\,\frac{y^5}{a^4} + \frac{3.5}{2.4.6.7}\,.\,\frac{y^7}{a^6} + \&c.$$

Diese Reihe drücket den Zirkelbogen aus, der durch die Applikate y bestimmet wird, wenn a der Halbmesser ist. Es fehlet eigentlich noch eine beständige Größe. Sie wird aber o, wenn man annimmt, daß der Bogen vom Ursprunge der Abzissen an gerechnet werde, wie bei vorigen Exempeln zu sehen ist.

Nehmen wir an, der Halbmesser sey $= 1$, so bekommen wir folgende Reihe:

$$y + \frac{1}{2.3}\,y^3 + \frac{3}{2.4.5}\,.\,y^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7}\,y^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\,y^9 + \&c.$$

Wird

Wird nun die Applikate y dem Halbmesser gleich, und also $= 1$, so wird der Bogen zum vierten Theile der Peripherie, welcher also ist,

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.}{2.4.6.8.9} + \&c.$$

Weil aber diese Reihe nicht sehr geschwinde abnimmt, so wollen wir dem y einen geringeren Werth geben. Es sey also y die Applikate, die einen Bogen von 30 Graden bestimmet, oder welches einerlei ist, der Sinus von 30 Graden. Dieser Sinus, wie die Trigonometrie lehret, ist die Hälfte des Halbmessers. Da nun dieser $= 1$ angenommen worden, so wird $y = \frac{1}{2}$. Folglich bekommen wir für einen Bogen von 30 Graden folgende Reihe.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{2.4.5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{3.5}{2.4.6.7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \&c$$

oder

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9} + \&c.$$

Drücket man nun alle Sätze in Dezimal-Brüchen aus, und addiret sie zusammen, so bekömmt man 0;52359877 für den 12ten Theil des Umkreises, folglich für den halben Umkreis 6mal so viel, das ist 3;14159262... Also verhält sich der Halbmesser zum halben Umkreise wie 1 zu 3;14159262... Eben so verhält sich der Durchmesser zum ganzen Umkreise.

Anmerkung. In den Exempeln haben wir die Größe der krummen Linie jedesmal in einer Funkzion von y gesuchet, weil auf diese Art die Rechnung meistens bequemere Resultate giebt. Will es ein Anfänger versuchen, eine Funkzion von x zu gebrauchen, so darf er nur dy in einer Funkzion von x und dx ausdrücken, anstatt daß wir dx in einer Funkzion von y und dy ausgedrücket haben.

§. 3.

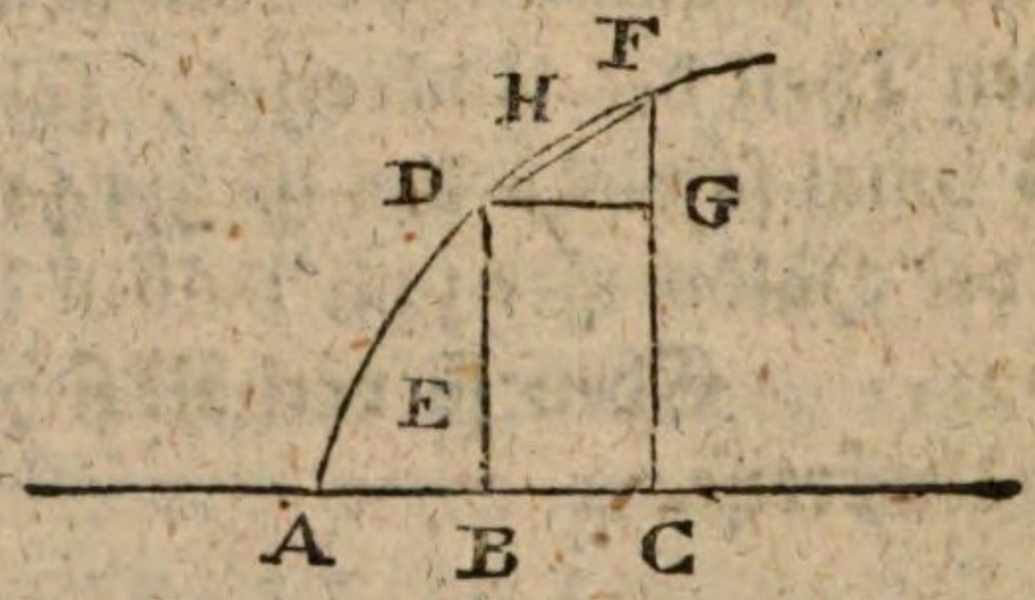
Zwischen dem Bogen einer krummen Linie und den Koordinaten, die ihn bestimmen, liegt allemal ein Raum, der in der Länge und Breite ausgedehnet ist, das ist eine Fläche, und diese Fläche ist eine Ebne, wenn, wie bis hierher angenommen worden, die Linie selbst auf einer Ebne beschrieben worden. Kann man nun solchen Raum genau berechnen, so läßt sich auch nöthigen Falls ein Quadrat machen, das ihm gleich ist. Deswegen wird die Berechnung der Ebne, die zwischen einer krummen Linie und ihren Koordinaten lieget, auch die Quadratur solcher Linie genannt.

§. 4.

Aufgabe.

Eine krumme Linie quadriren, oder deren Flächen-Inhalt berechnen.

Vorbereitung.



Es sey der Ebne Raum E eingeschlossen zwischen der krummen Linie AD und den Koordinaten AB, BD. Dieser Raum nehme zu um den Theil BCFHDB = △ E.

Es bestehet dieses Stück BCFHDB aus dem Rektangel BCGD, dem Dreiecke DGF, und dem Abschnitte DFHD.

Das

Das Rektangel BCGD hat $BC = \Delta x$ zur Grundlinie, und die Applikate $BD = y$ zur Höhe. Also ist sein Flächen-Inhalt $BD \times BC = y \Delta x$. Das Dreieck DGF hat ebenfalls $DG = \Delta x$ zur Grundlinie und $GF = \Delta y$ zur Höhe, also ist der Flächen-Inhalt $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y$. Der Abschnitt DFHD hat auch seine bestimmte Größe, die sich nicht so leicht angeben läßt, die aber sichtbarlich weniger beträgt, als das Dreieck DGF.

Es ist demnach

$$\Delta E = y \Delta x + \tfrac{1}{2} \Delta x \Delta y + DFHD$$

Gesetzet nun, ΔE und folglich Δx und Δy werden sehr klein, so beträgt das Produkt $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y$ sehr wenig in Vergleich mit $y \Delta x$, und da DFHD noch kleiner ist, so beträgt auch dieses Stück nichts merkliches zur Vergrösserung oder Verkleinerung des Rektangels $y \Delta x$.

Je kleiner nun ΔE, Δx, Δy werden, desto sicherer können $\frac{1}{2} \Delta x \Delta y$ und DFHD wegbleiben, sie können aber nie in der That verschwinden, so lange noch ΔE wirklich bestehen soll. Folglich bekommen wir die Gränze des Verhältnisses, das durch die lezte Gleichung ausgedrücket wurde, wenn wir an dessen Stelle schreiben

$$\partial E = y \partial x$$

Wir haben also die Gränze der Differenz des Raumes ABD, in einer Funkzion von y und ∂x, und weil y selbst eine Funkzion von x, oder ∂x eine Funkzion von y und ∂y ist, so haben wir ∂E in einer Funkzion entweder von x und ∂x oder von y und ∂y.

Aus der Gränze der Differenz einer Funkzion läßt sich aber, vermittelst der Integral-Rechnung, die Funkzion selbst finden, deren Differenz diese Gränze hat. Also

läßt sich die Funkzion von x oder y finden, welche $y\delta x$ oder δE zur Gränze hat. Diese Funkzion wird demnach den Raum E ausdrücken.

Auflösung. Um den Raum zu finden, der zwischen zwei Koordinaten und dem Bogen der krummen Linie, welchen sie bestimmen, lieget; integrire man die Formel $y\delta x$ nachdem anstatt y dessen Werth in einer Funkzion von x, oder anstatt δx dessen Werth in einer Funkzion von y und δy gesetzet hat.

Exempel. Es sey die gemeine Parabel zu quadriren, so ist

$$y^2 = ax$$

$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$y\delta x = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \delta x$$

$$\int y\delta x = \tfrac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{3} x . a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{3} x \sqrt{ax} + C$$

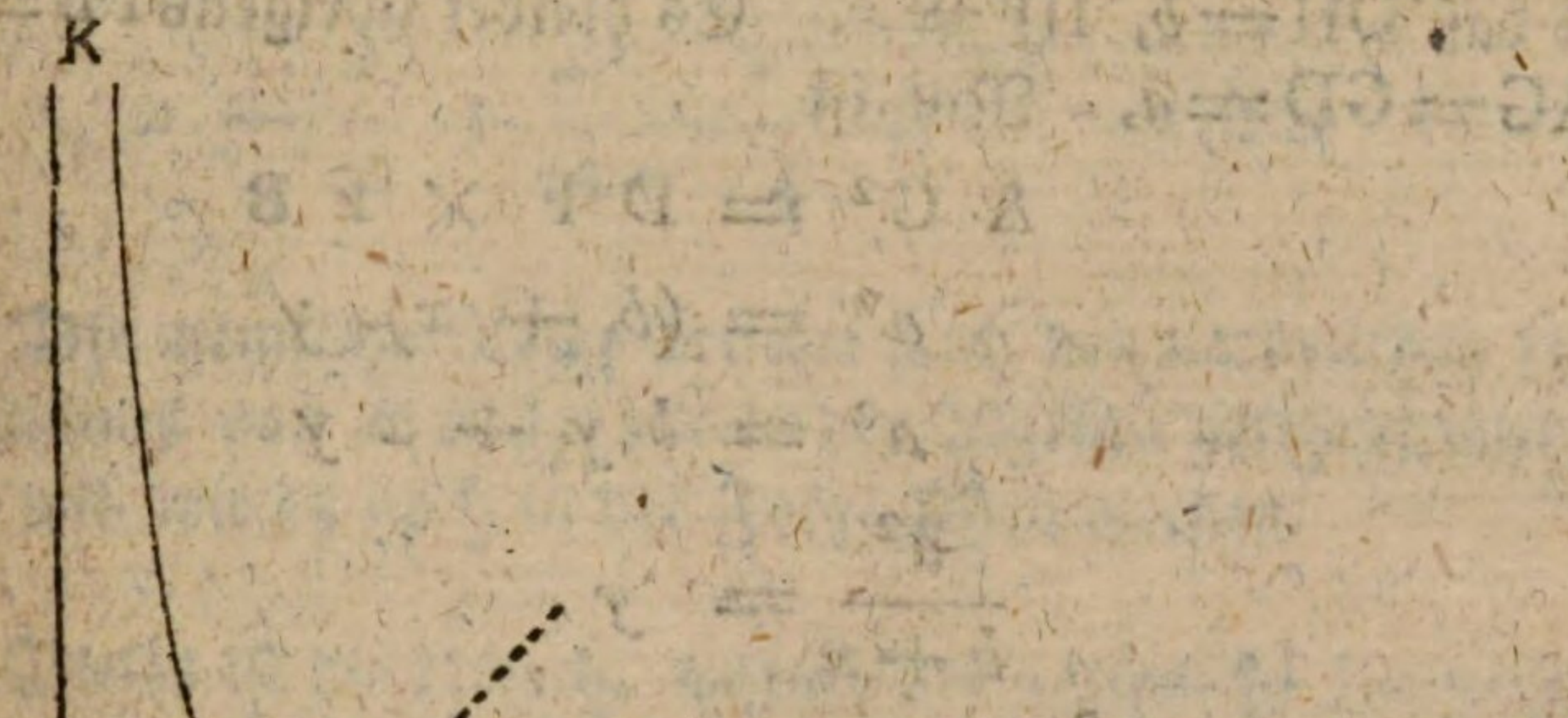
$$= \tfrac{2}{3} xy + C$$

Wenn man den Raum vom Ursprunge der Linie an rechnet, so wird er $= o$, wenn x und $y = o$, folglich wird $C = o$, und der paraboliſche Raum ist blos $\frac{2}{3} xy$.

Dieser Raum machet also $\frac{2}{3}$ des Rektangels, aus bei den Koordinaten. Dieses Beispiel beweiset unwidersprechlich, daß ein geradlinichter Raum mit einem krummlinichten kommensurabel seyn kann.

Exem-

Exempel II. Es sey die Linie AC eine gleichseitige Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, deren eine DE ist.



Es sey AG oder DG $= a$, DF $= x$, FB $= y$, so ist

$$a^2 = xy$$

$$a^2 x^{-1} = y$$

$$a^2 x^{-1} \partial x = y \partial x$$

$$\text{oder} \qquad a^2 \frac{\partial x}{x} = y \partial x$$

Dieser Ausdruck $a^2 \frac{\partial x}{x}$, oder $a^2 x^{-1} \partial x$ giebt nach der gewöhnlichen Regel das Integral $\frac{a^2 x^{-1+1}}{-1+1}$ oder $\frac{a^2 x^0}{0} = \frac{a^2}{0}$ welches eine unendliche Größe ist, und eigentlich den Raum KDFBK ausdrücket, welcher sich nach K zu ins unendliche erstrecket.

Um nun dieses zu vermeiden, wollen wir den Ursprung der Abzissen nicht in D, sondern irgend wo in H nehmen, so daß $DH = b$, $HF = x$. Es bleibet übrigens $FB = y$, $AG = GD = a$. Nun ist

$$AG^2 = DF \times FB$$

$$a^2 = (b + x) \cdot y$$

$$a^2 = by + xy$$

$$\frac{a^2}{b+x} = y$$

$$\frac{a^2}{b+x} \partial x = y \partial x$$

Wenn man den Bruch $\frac{a^2}{b+x}$ durch die Division oder durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten in eine unendliche Reihe verwandelt, und die Sätze alle mit ∂x multiplizirt, so bekömmt man

$$\frac{a^2}{b+x}\partial x = \frac{a^2}{b}\partial x - \frac{a^2}{b^2}x\partial x + \frac{a^2}{b^3}x^2\partial x - \frac{a^2}{b^4}x^3\partial x + \frac{a^2}{b^5}x^4\partial x \text{ \&c.}$$

$$\text{oder} = a^2\left(\frac{\partial x}{b} - \frac{x\partial x}{b^2} + \frac{x^2\partial x}{b^3} - \frac{x^3\partial x}{b^4} + \frac{x^4\partial x}{b^5} \text{ \&c.}\right)$$

Man integrire, so kömmt

$$a^2\left(\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} - \frac{x^4}{4b^4} + \frac{x^5}{5b^5} - \text{ \&c.}\right) + C$$

Soll der Raum bei dem Punkte H mit der Applikate HI anfangen, so ist dieser Raum $= o$, wenn $x = o$. Folglich wird auch $C = o$. Die Reihe drücket demnach den Raum HFBIH aus. Es sey $AG = a = 1$, und anstatt

statt b nehme man auch $DH = DG = AG = a = 1$, so bekömmt man für den Raum GFBAG diese Reihe

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \&c.$$

Die nemliche Reihe drücket auch den natürlichen Logarithmus von x aus, wie in der Algebra gelehret wird, und wie wir es noch in der Folge sehen werden.

Dieses ist die Ursach, warum der natürliche Logarithmus einer Zahl auch der hyperbolische Logarithmus genannt wird.

Exempel III. Es solle der Zirkel quadriret werden. Zu mehrerer Bequemlichkeit laßt uns den Ursprung der Abzissen aus dem Mttelpunkte nehmen. Dann ist

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$y \partial x = \partial x \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Entwickelt man $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in eine unendliche Reihe, so kömmt

$$\partial x \sqrt{(a^2 - x^2)} = a\partial x - \frac{1}{2a} x^2 \partial x - \frac{1}{8a^3} x^4 \partial x - \frac{1}{16a^5} x^6 \partial x - \frac{5}{128a^7} x^8 \partial x - \&c.$$

Integriret man diese Reihe, so kömmt

$$C + ax - \frac{1}{6a} x^3 - \frac{1}{40a^3} x^5 - \frac{1}{112a^5} x^7 - \frac{5}{1152a^7} x^9 - \&c.$$

Ist $x = o$, so wird das ganze Integral $= o$, folglich ist auch $C = o$.

Setzet man a anstatt x, das ist, machet man die Abzisse dem Halbmesser gleich, so kömmt für den Viertel-Zirkel folgender Werth,

$$a^2 - \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{40} a^2 - \frac{1}{112} a^2 - \frac{5}{1152} a^2 - \text{ \&c.}$$

$$\text{oder } a^2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \text{ \&c.}\right)$$

Nehmen wir nun den Halbmesser $a = 1$, so wird der Viertelzirkel

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \text{ \&c.}$$

Vermöge dieser Reihe kann man nun den Viertelzirkel, folglich auch den ganzen Zirkel in Dezimal-Brüchen berechnen. Dieses ist aber unnöthig. Denn da wir oben (§. 2.) die Peripherie schon gefunden haben, so läßt sich aus derselben schon die Fläche des Zirkels berechnen, wie in der gemeinen Geometrie gelehret wird.

Exempel *IV*. In der Ellipse ist, wenn man die Abzisse auf der Haupt-Axe vom Mittelpunkte aus nimmt,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$y \, \partial \, x = \frac{b}{a} \, \partial \, x \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Dieser Ausdruck wird wie beym Zirkel integriret, nur daß das Integral von $\partial x \sqrt{(a^2 - x^2)}$ noch mit $\frac{b}{a}$ multipliziret wird. Es kömmt demnach für den vierten Theil der Ellipse

$$\frac{b}{a} \cdot a^2 \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \text{ \&c.}\right)$$

oder $ab\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}-\frac{5}{1152}-\&c.\right)$

Also verhält sich die Viertel-Ellipse zum Viertel-Zirkel, oder die Ellipse zum Zirkel, der auf ihrer Haupt-Axe beschrieben ist, wie

$ab\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\&c.\right)$ zu $a^2\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\&c.\right)$

Das ist, wie b zu a, oder wie die halbe kleine Axe zur halben Haupt-Axe, oder wie die kleine Axe zur Haupt-Axe.

Ferner, wäre ein Viertel-Zirkel mit dem Halbmesser $\sqrt{ab}$ beschrieben, so würde der Flächen-Inhalt seyn

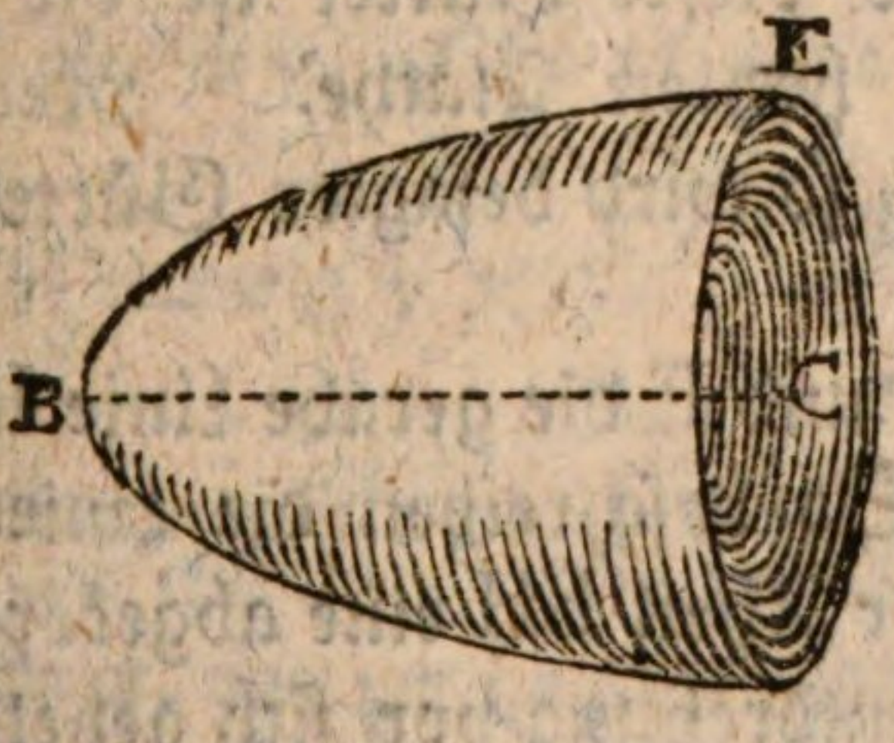
$$(\sqrt{ab})^2\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\&c.\right)$$

oder $$ab\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\&c.\right)$$

Das ist, der Viertel-Zirkel wäre einer Viertel-Ellipse gleich deren halbe Axen a und b wären. Es ist demnach die Viertel-Ellipse einem Viertel-Zirkel, oder die Ellipse einem Zirkel gleich, dessen Halbmesser die mittlere Proporzional-Linie ist zwischen beiden halben Axen, oder dessen Durchmesser die mittlere Proporzional-Linie zwischen beiden Axen ist.

§. 5.

Gesetzet, die krumme Linie BE drehe sich um ihre unverrückte Axe oder Direktrize BC herum, so beschreibet



sie eine hohle Fläche, die wie eine Kappe gestaltet ist. Eine solche Fläche pfleget man eine After-Kegelfläche zu nen-

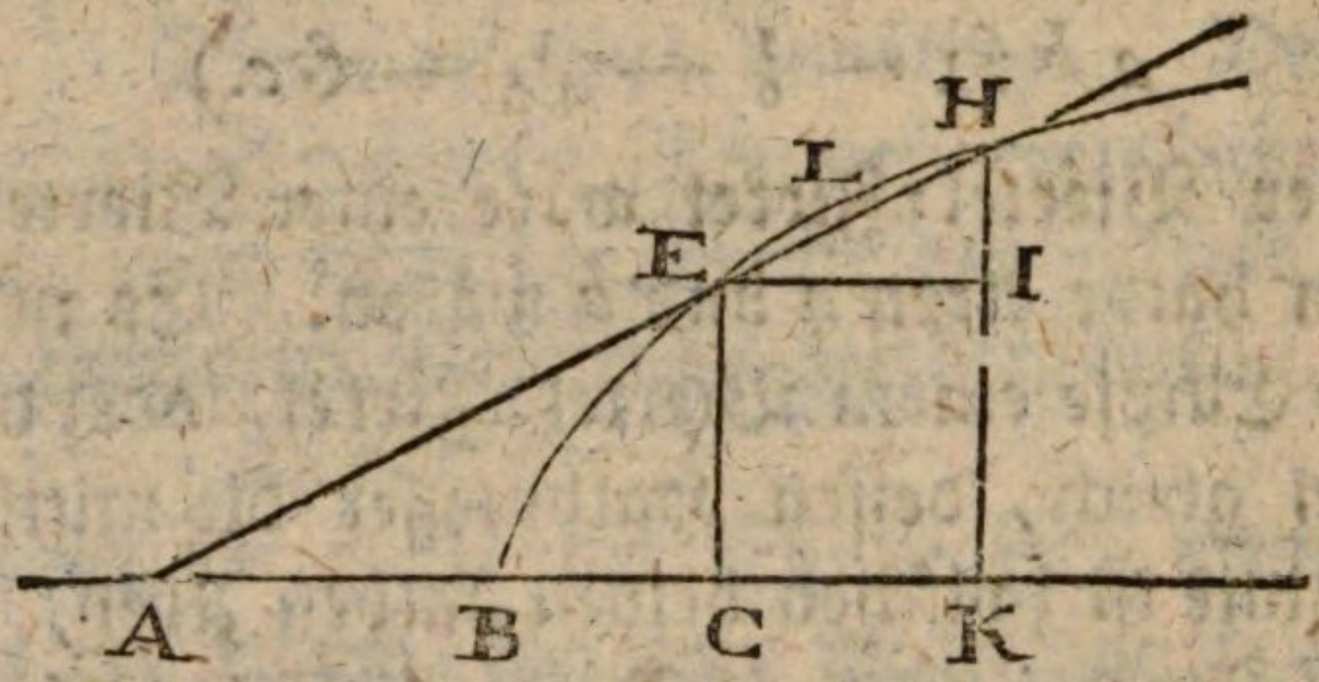
nen. (Surface d'un conoïde, Surface d'un ſolide de révolution).

§. 6.

Aufgabe.

Aus der Gleichung einer krummen Linie ſoll man die Größe der Fläche finden, welche entſtehet, wenn die krumme Linie ſich um ihre Axe oder Direktrize herumwendet.

Vorbereitung.



Es drehe ſich die krumme Linie BE um ihre Axe BC, ſo beſchreibet ſie, wie vorher geſaget, eine hohle Fläche. Geſetzet, der Bogen BE nehme zu um ELH, ſo beſchreibet dieſes Stück ELH einen Gürtel, der noch zur vorigen Fläche hinzukömt, und dieſer Gürtel iſt die Zunahme oder die Differenz der hohlen Fläche. Nennen wir demnach die Fläche Q, ſo wird beſagter Gürtel $= \Delta Q$.

Ziehe durch H und E die gerade Linie HA bis zur verlängerten Axe. So beſchreiben die Linien AH, AE Kegelflächen, und der Theil EH eine abgeköpfte Kegelfläche, während daß die Umdrehung vor ſich gehet. Nun findet man bekanter Maaßen die runde Fläche eines Kegels, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multiplizirt.

Im

Im Kegel, den die Linie AE beschreibet, ist CE der Halbmesser der Grundfläche, folglich 2CE der Durchmesser, und wenn sich der Durchmesser zur Peripherie verhält, wie 1 zu π, so ist die Peripherie der Grundfläche 2πCE. Die halbe Seite des Kegels ist $\frac{1}{2}$AE. Also ist die von der Linie AE beschriebene Kegelfläche 2πCE $\times \frac{1}{2}$AE $= \pi$. CE. AE.

Aus gleichen Gründen ist die von der Linie AH beschriebene Fläche $= \pi$. KH. AH $= \pi$. (KI + IH) (AE+EH) $= \pi$ (CE+ IH)(AE+EH)$= \pi$CE$\times$AE $+\pi$. CE.EH$+\pi$. IH. AE$+\pi$. IH. EH. Nun ist die abgeköpfte Kegelfläche die von EH beschrieben wird, dem Unterschiede beider vorigen gleich. Sie ist demnach π. CE. EH $+\pi$. IH. AE $+\pi$. IH. EH.

Es ist aber CE$=y$, IH$=\Delta y$, AE$= \sqrt{\left(y^2+y^2\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)} =$

$y\sqrt{\left(1+\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)} = \frac{y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta y}$, wie bei der Lehre von den Tangenten bewiesen worden. Endlich ist

$$EH = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}.$$

Also ist

$$\pi.CE \times EH = \pi y.\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

$$\pi.AE \times IH = \pi\Delta y \times \frac{y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Delta y}$$

$$= \pi.y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

$$\pi.IH \times EH = \pi.\Delta y.\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

Nimmt man alles zusammen, so kömmt $2\pi y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)} + \pi\Delta y\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$, für die abgeköpfte

Kegelfläche. Werden nun Δx und Δy sehr klein, so verschwindet beinahe $\pi \Delta y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, weil dieser Ausdruck alsdann zwei sehr kleine Dimensionen enthält. Zugleich verschwindet auch beinahe der kleine Unterschied zwischen der abgeköpften Kegelfläche und dem vom Bogen ELK beschriebenen Gürtel. Also ist

$$\text{beinahe } \Delta Q = 2\pi y \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Oder, wenn die Gleichung nur die Gränze der Verhältnisse anzeiget, so ist

$$dQ = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Drücket man nun dx in einer Funkzion von y und dy aus, so hat man dQ in einer Funkzion von y und dy. Da also die Gränze der Differenz der hohlen Fläche Q in einer Funkzion von y und dy gegeben ist, so läßt sich vermöge der Integral-Rechnung die Funkzion von y finden, welche die hohle Fläche Q ausdrücket.

Auflösung.

Wenn Q die runde Fläche ist, so hat man, wie eben jezt gefunden worden,

$$dQ = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

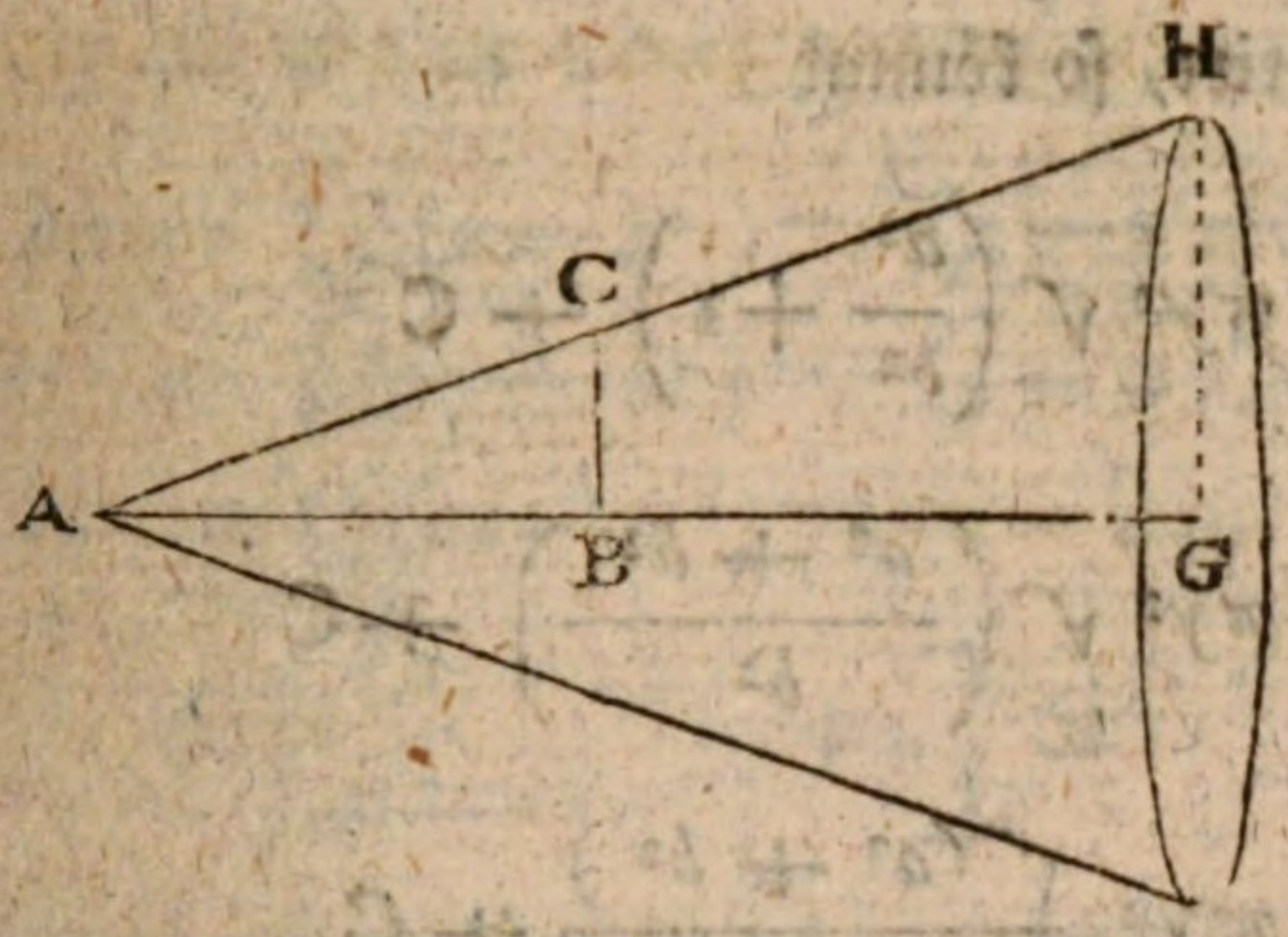
wo π die Peripherie des Zirkels für den Durchmesser 1 vorstellet. nemlich $\pi = 3{;}1459262\ldots$

Man setze anstatt dx^2 dessen Werth in einer Funkzion von y und dy, welche aus der Gleichung gezogen wird. Man integrire die so veränderte Formel. Das erhaltene Integral wird der Werth von Q seyn.

Anstatt, daß man in der Formel dx^2 in eine Funkzion von y und dy verwandelt, kann man auch y und dy^2 in eine Funkzion von x und dx verwandeln, und dann integriren.

Exempel I. Die vorgetragene Methode läßt sich auf die Kegelfläche selbst anwenden, auf deren Eigenschaften sie gegründet ist.

Es



Es sey AH eine gerade Linie, und AG die Direktrize, welche ihre Lage bestimmet. Das rechtwinkliche Dreieck AGH drehe sich um seine Seite AG, so beschreibet die gerade AH eine Kegelfläche. Es sey die Axe AG des Kegels $= a$, der Halbmesser GH der Grundfläche $= b$, ferner $AB = x$, $BC = y$, so ist, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

$$a, b :: x, y$$

oder $$ay = bx$$

welches die Gleichung der geraden AH in Betrachtung der Direktrize AG ist.

Weil nun

$$x = \frac{a}{b} y$$

so ist $$dx = \frac{a}{b} dy$$

$$dx^2 = \frac{a^2}{b^2} dy^2$$

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right) dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}$$

$$2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = y\,dy \cdot 2\pi \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)}$$

Man

Man integrire, so kömmt

$$\pi y^2 \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}+1\right)}+C$$

$$\text{oder } \pi y^2 \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)}+C$$

$$\text{oder } \pi y^2 \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}+C$$

Wenn die Fläche von der Spitze A an gerechnet werden soll, so wird sie o, wenn $y = o$, folglich ist auch $C = o$. Wird $y = GH = b$, so bekömmt man für den ganzen Kegel

$$\pi b \sqrt{(a^2+b^2)}$$

Es ist aber $\sqrt{(a^2+b^2)} = AH$ die Seite des Kegels.

Also ist die runde Fläche

$$\pi . GH \times AH$$

Nun wäre $2GH \times \pi$ die Peripherie der Grundfläche, also ist $\pi . GH$ die halbe Peripherie derselben, und die runde Fläche ist gleich dem Produkte aus der Seite AH des Kegels mit dem halben Umkreise der Peripherie der Basis, oder, welches einerlei ist, die runde Fläche ist gleich der ganzen Peripherie der Basis, mit der halben Seite des Kegels multiplizirt. Dieses ist der Lehrsatz wovon wir ausgegangen sind, um die Formel zu finden, und worauf uns nun die nemliche Formel zurück führet.

Exempel II. Die gegebene Linie sey ein Zirkel der a zum Durchmesser hat, so ist

$$y = \sqrt{(ax - x^2)}$$

$$dy = \tfrac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a - 2x)\,dx$$

$$dy^2 = \tfrac{1}{4}(ax - x^2)^{-1}(a - 2x)^2\,dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \left[\tfrac{1}{4}(ax - x^2)^{-1}(a - 2x)^2 + 1\right]dx$$

$$= \left[\frac{(a - 2x)^2}{4(ax - x^2)} + 1\right] dx^2$$

$$= \frac{(a - 2x)^2 + 4(ax - x^2)}{4(ax - x^2)}\,dx^2$$

$$= \frac{a^2\,dx^2}{4(ax - x^2)}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$$

$$2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} \cdot 2\pi y$$

$$= \frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}\, 2\pi \cdot \sqrt{(ax - x^2)}$$

$$= a\pi\,dx$$

Integriret man nun $a\pi\,dx$, so kömmt

$$a\pi x + C$$

weil nun die Kugelfläche $= o$, wenn $x = o$, so ist $C = o$, also ist die Kugelfläche, vom Ursprunge der Abzisse x gerechnet, $a\pi x$.

Man setze $x = a$, so bekömmt man für die ganze Kugelfläche $a^2\pi$. Wenn nun der Durchmesser a ist, so hat ein großer Zirkel der Kugel zum Flächen-Inhalte $\frac{1}{4}a^2\pi$. Woraus dann folget, daß die Kugelfläche 4 mal so groß ist, als

die

die Fläche eines großen Zirkels der Kugel, welches auch schon aus anderen Gründen bekannt ist

Daher folget ferner, daß die Kappen oder Stücke der Kugelfläche, wenn man sie vom Ursprunge der Abzissen an rechnet, sich verhalten wie die Abzissen. Denn es sey eine Abzisse x, so bestimmet sie die Kappe $a \pi x$. Es sey eine andere Abzisse x', so wird die Kappe $= a \pi x'$. Es ist aber $a \pi x$ zu $a \pi x'$ wie x zu x'.

Aus dem nemlichen Grunde verhält sich jede Kappe zur ganzen Kegelfläche wie die Abzisse zum Durchmesser.

§. 7.

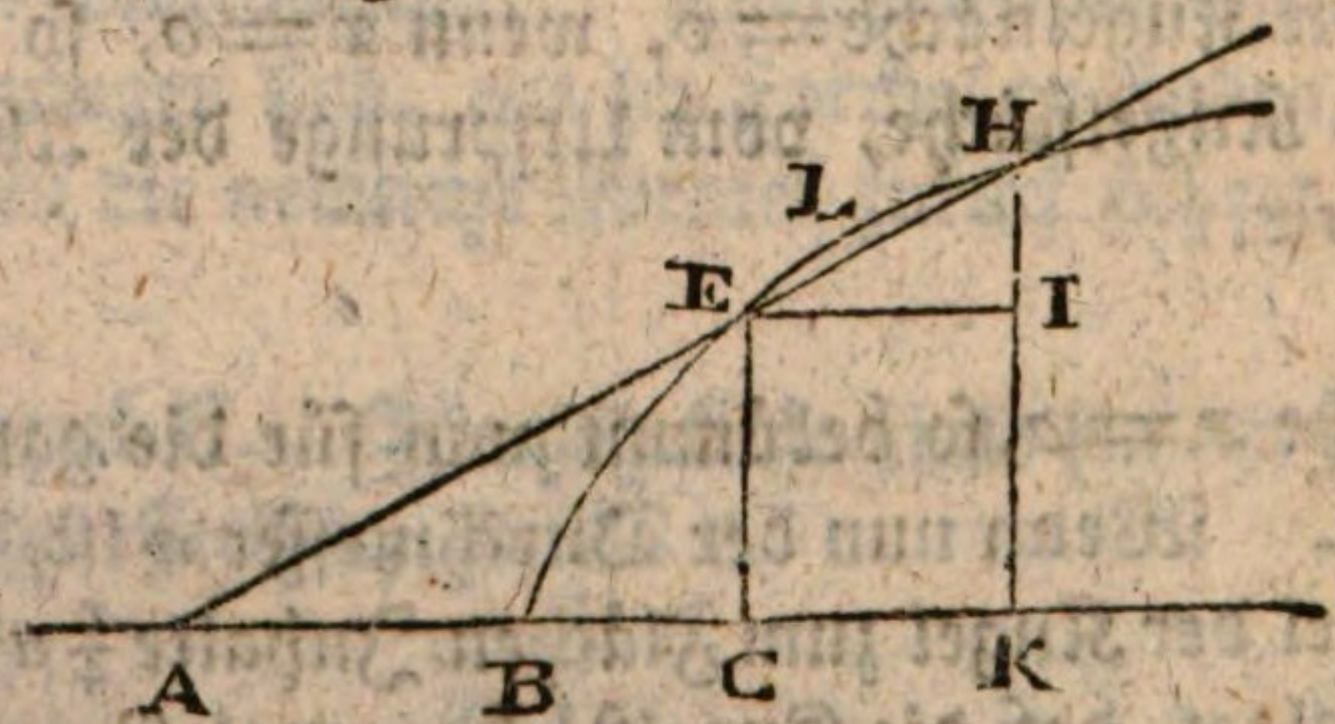
Wenn, wie bei voriger Aufgabe angenommen worden, eine krumme Linie sich um ihre Axe oder Direktrike herum drehet, so entstehet nicht nur eine hohle Fläche, sondern auch ein geometrischer Körper der in derselben enthalten ist. Man nennet ihn einen **Afterkegel** (Conoïde Solide de révolution.)

§. 8.

Aufgabe.

Es soll die Solidität eines Körpers berechnet werden, der da entstehet, wenn eine krummlinichte Ebne sich um ihre Axe herum drehet.

Vorbereitung.



Die

Die krummlinichte Ebne BEC beschreibt bei ihrer Umwendung um die Axe BC einen Körper der eine gewisse Solidität hat. Es nehme BE zu um ELH, folglich BC oder x um CK ($= \Delta x$) und CE oder y um IH ($= \Delta y$). Durch die Punkte H und E ziehe HA. Nun drehe sich wiederum die ganze Figur um ihre Axe, so beschreiben die Dreiecke AKH, ACE jedes einen Kegel, das Trapazium CKHE aber einen abgeköpften Kegel.

Die Solidität eines Kegels wird erhalten, wenn man seine Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multiplizirt. Der vom Dreiecke ACE beschriebene Kegel hat zum Halbmesser der Grundfläche CE, folglich zum Durchmesser 2 CE, zur Peripherie der Grundfläche $2CE.\pi$, zum Inhalte der Grundfläche $2\pi.CE \times \frac{1}{2} CE = \pi.CE^2$. Multiplizire dieses mit dem dritten Theile der Höhe AC, so kömmt

$$\frac{\pi}{3} CE^2.\ AC$$

Aus demselbigen Grunde ist die Solidität des Kegels der vom Dreiecke AKH beschrieben wird

$$\frac{\pi}{3} KH^2.\ AK$$

Der abgeköpfte Kegel der vom Trapez CEHK beschrieben wird, ist der Unterschied beider vorhergehenden Kegel, nemlich

$$\frac{\pi}{3} KH^2.AK - \frac{\pi}{3}.\ CE^2.\ AC$$

oder $$\frac{\pi}{3}(KH^2.\ AK - CE^2.\ AC)$$

Nun

Nun ist $KH = y + \Delta y$, und $AK = AC + CK = y\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x$. Also ist $KH^2 . AK = (y + \Delta y)^2 . (y\frac{\Delta x}{\Delta y} + \Delta x)$. Entwickelt man diesen Ausdruck, so kömt

$$KH^2 . AK = y^3 \frac{\Delta x}{\Delta y} + 3y^2 \Delta x + 3y \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y^2$$

Ferner ist $CE = y$, $AC = y\frac{\Delta x}{\Delta y}$, also $CE^2 . AC = y^3 \frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Dieses ziehe man vom vorigen ab, so bleibet

$$KH^2 . AK - CE^2 . AC = 3y^2 \Delta x + 3y \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y^2$$

$$\frac{\pi}{3}(KH^2 . AK - CE^2 . AC) = \frac{\pi}{3}(3y^2 \Delta x + 3y \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y^2)$$

$$e = \pi y^2 \Delta x + \pi y \Delta x \Delta y + \tfrac{1}{3}\pi \Delta x \Delta y^2$$

Und dieses ist die Solidität des abgeköpften Kegels der vom Trapezium CEHK beschrieben wird. Die Scheibe des runden Körpers, welche vom Stücke CELHK der Ebne beschrieben worden, bestehet nun aus diesem abgeköpften Kegel, nebst einer geringen Vermehrung, die vom Abschnitte EHLE bey der Umdrehung beschrieben worden, und welche wir V nennen wollen. Also ist dieses der Zuwachs des Körpers, wenn die Abzisse um CK oder Δx und die Applikate um IH oder Δy zunimmt. Der von der Ebne BCE beschriebene Raum sey S, so ist demnach

$$\Delta S = \pi y^2 \Delta x + \pi y \Delta x \Delta y + \tfrac{1}{3}\pi \Delta x \Delta y^2 + V$$

Werden nun Δx und Δy sehr klein, so verschwinden beinahe $\pi y \Delta x \Delta y$, $\frac{1}{3}\pi \Delta x \Delta y^2$, und um desto mehr das Stückchen V. Folglich haben wir zur Gränze der vorigen Gleichung

$$dS = \pi y^2 dx$$

Man merke, daß $\pi y^2 dx$ eigentlich der Zylinder ist, der y zum Halbmesser und dx zur Höhe hat, und in der That

nähert sich die von CELHK beschriebene Scheibe, wenn dx sehr klein ist, je mehr und mehr dem vom Rektangel CEIK beschriebenen Zylinder.

Da nun die Gränze der Differenz von S bekannt ist, so wird durch die Integral-Rechnung die Funkzion selbst gefunden, welche die Solidität S ausdrücket.

Auflösung.

In die Formel $\pi y^2 dx$ setze anstatt dx dessen Werth in einer Funkzion von y und dy, oder setze anstatt y^2 dessen Werth in einer Funkzion von x. Dann integrire. So giebt das Integral die verlangte Solidität.

Exempel I. Wir wollen wiederum die Regel auf den Kegel anwenden, woher sie entsprungen ist. Wir haben gesehen, (§. 6) im Kegel sey

$$y = \frac{b}{a} x$$

$$\text{daher } y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$\pi y^2 dx = \pi . \frac{b^2}{a^2} x^2 dx$$

$$\text{das Integral ist} = \frac{\pi}{3} . \frac{b^2}{a^2} x^3 + C$$

und C wird null, wenn $x = o$ auch die Solidität $= o$ geben soll. Man setze $x = a$, so bekömmt man für den ganzen Kegel

$$\frac{\pi}{3} . b^2 a$$

welches mit den oben angeführten Grundsätzen übereinstimmet.

Exempel II. Im Zirkel ist

$$y^2 = ax - x^2$$

daher $\pi y^2\, dx = \pi a\, x dx - \pi x^2\, dx$

Man integrire, so wird

$$\int \pi y^2\, dx = \frac{\pi}{2} a x^2 - \frac{\pi}{3} x^3 + C$$

und C ist = o wenn die Solidität mit den Abzissen anfängt.

Es werde $x = a$, so bekömmt man für die ganze Kugel

$$\frac{\pi}{2} a^3 - \frac{\pi}{3} a^3 = \frac{\pi}{6} a^3$$

Es werde ein Zylinder gemacht der a zum Durchmesser und zur Höhe habe, so ist die zirkelrunde Grundfläche $= a\pi . \frac{1}{4} a = \frac{a^2 \pi}{4}$, und die Solidität $= \frac{a^2 \pi}{4} . a = \frac{\pi}{4} a^3$.

Demnach verhält sich die Kugel zum umgeschriebenen Zylinder,

$$\text{wie } \frac{\pi}{6} a^3 \text{ zu } \frac{\pi}{4} a^3$$

oder wie $\frac{1}{6}$ zu $\frac{1}{4}$

oder wie 4 zu 6

oder wie 2 zu 3

welches auch aus der gemeinen Geometrie bekannt ist.

Zwölf=

Zwölftes Hauptstück.

Von krummen Linien mit schiefwinklichen Koordinaten.

§. 1.

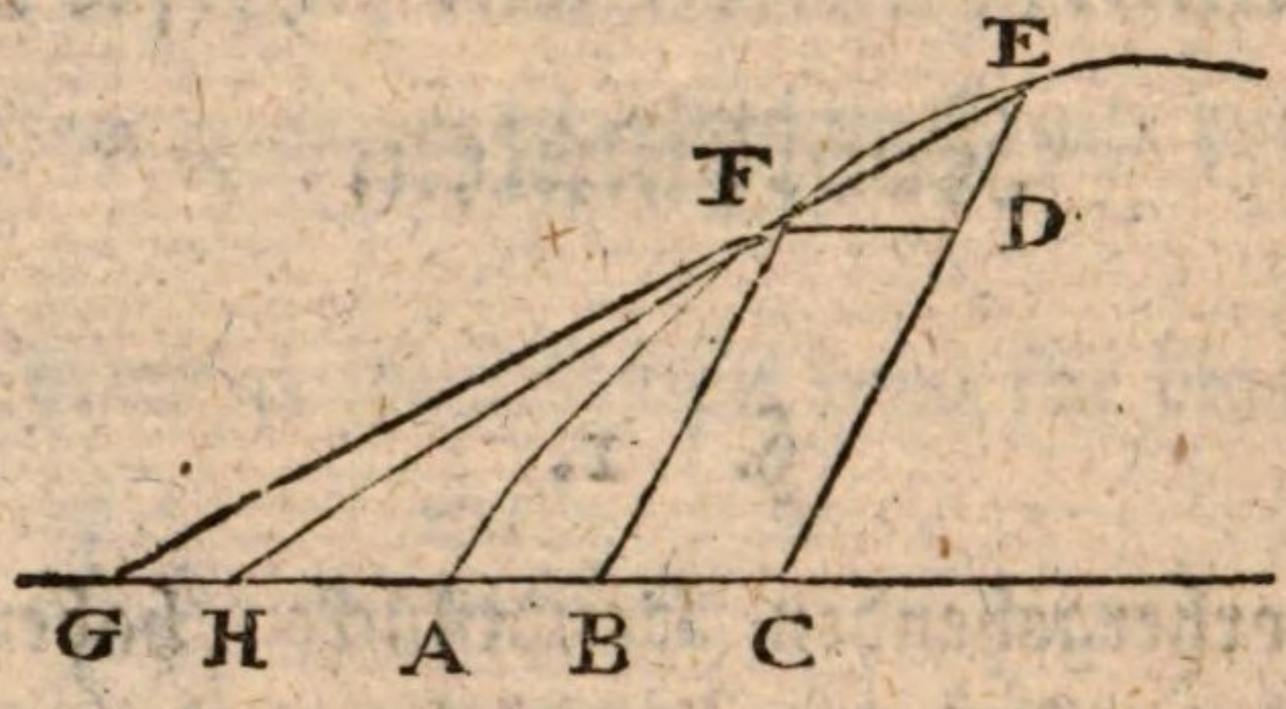
In den vorhergehenden Hauptstücken haben wir vorausgesetzet, daß die Applikaten auf ihren Abzissen senkrecht stehen, welches zwar der gewöhnlichste Fall, aber doch nicht der einzige, ist. Denn es wird der Gang und die Beschaffenheit einer krummen Linie eben so gut bestimmet, wenn die Applikaten auf der Direktrize schief stehen; nur müssen sie mit einander parallel seyn, so daß der Koordinaten-Winkel beständig einerlei bleibe, wie man es schon bei den Kegelschnitten in Betreff ihrer Diameter gesehen hat. Wir können demnach die krummen Linien mit schiefwinklichen Koordinaten nicht gänzlich unberühret lassen, und müssen zeigen, wie die gewöhnlichen Formeln auf dieselben angewandt werden können.

Uebrigens setzen wir voraus, daß der Leser schon mit den Anfangsgründen der gemeinen Trigonometrie bekannt ist. Wir bedienen uns hier der kurzen Zeichen, die wir im selbstlernenden Algebristen und im selbstlernenden Geometer vorgeschlagen haben; nemlich S bedeutet den Sinus, S′ den Kosinus, T die Tangente, T′ die Kotangente, ß die Sekante, ß′ die Kosekante, V den Sinusversus, V′ den Kosinusversus.

§. 2.

Aufgabe.

Die Subtangente einer schiefwinklichen krummen Linie finden.



Auflösung. Die Formel ist gänzlich die nemliche, wie bei rechtwinklichen Koordinaten, nemlich, es ist

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy}$$

Denn es sey AB$=x$, BF$=$CD$=y$, BC$=$FD$=\Delta x$, DE$=\Delta y$. Durch E und F werde gezogen EFG, und FH sey die Tangente für den Punkt F. So ist auch hier

$$ED, DF :: FB, BG$$

$$\Delta y, \Delta x :: y, BG$$

$$\text{daher} \quad BG = y\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Die Gränze der BG ist die Subtangente BH, und die Gränze von $y\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ist $y\frac{dx}{dy}$, also ist

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy}$$

Ferner

Exempel. Es sey AFE eine schiefwinkliche Parabel, in welcher $y^2 = ax$, so findet man, wie bei der rechtwinklichen Parabel

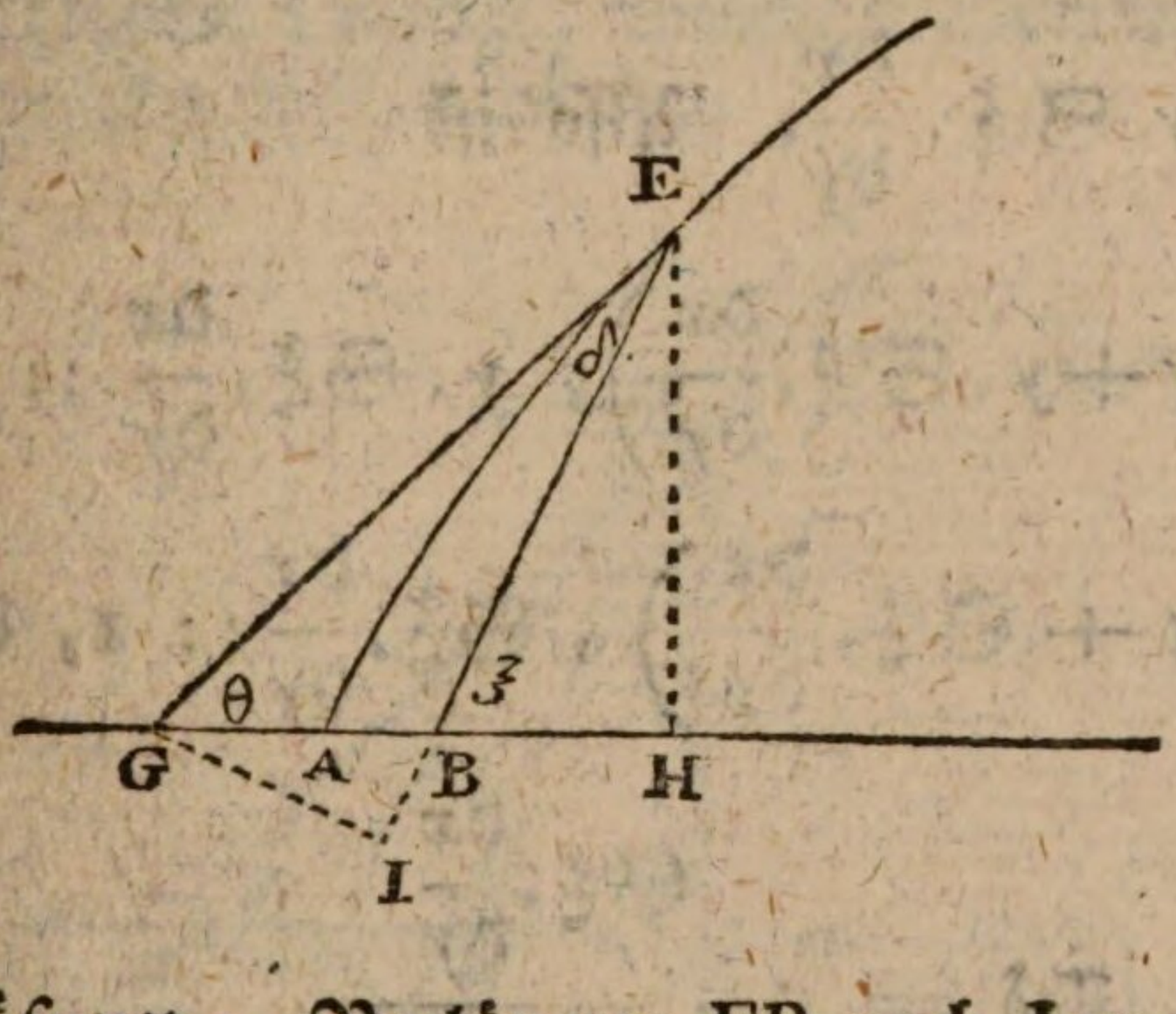
$$y \frac{dx}{dy} = 2x$$

das heißt, die Subtangente BH ist gleich zweimal der Abzisse AB.

§. 3.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Koordinaten-Winkel ξ, soll der Winkel δ gefunden werden, der die Applikate BE mit der Tangente EG bildet.



Auflösung. Verlängere EB nach I zu, und fälle GI senkrecht auf die verlängerte EB, so ist im rechtwinklichen Dreiecke GBI.

$$GB, BI :: 1, \sin BGI \; (= \sin' GBI = \sin' \xi)$$

also $$GB, BI :: 1, \sin' \xi$$

$$y \frac{dx}{dy}, BI :: 1, \sin' \xi$$

daher $$BI = y . \sin' \xi . \frac{dx}{dy}$$

Ferner

Ferner ist

$$GB, GI :: 1, \mathfrak{S}GBI (= \mathfrak{S}\xi)$$

also $GB, GI :: 1, \mathfrak{S}\xi$

$$y\frac{\partial x}{\partial y}, GI, 1, \mathfrak{S}\xi$$

daher $GI = y \cdot \mathfrak{S}\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$

Weiter ist

$$EI, IG :: 1, \mathfrak{T}\delta$$

Nun ist $EI = EB + BI = y + y \cdot \mathfrak{S}'\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$

und $IH = y \cdot \mathfrak{S}\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$. Also ist

$$\left(y + y \cdot \mathfrak{S}'\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}\right), y \cdot \mathfrak{S}\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y} :: 1, \mathfrak{T}\delta$$

oder $\left(1 + \mathfrak{S}'\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}\right), \mathfrak{S}\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y} :: 1, \mathfrak{T}\delta$

Also $$\mathfrak{T}\delta = \frac{\mathfrak{S}\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}}{1 + \mathfrak{S}'\xi \cdot \frac{\partial x}{\partial y}}$$

oder auch $$\mathfrak{T}\delta = \frac{\partial x \, \mathfrak{S}\xi}{\partial y + \partial x \mathfrak{S}'\xi}$$

Exempel. Es sey die Linie AE eine schiefwinkliche Parabel, worin $y^2 = ax$, so wird

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{a}$$

Folg-

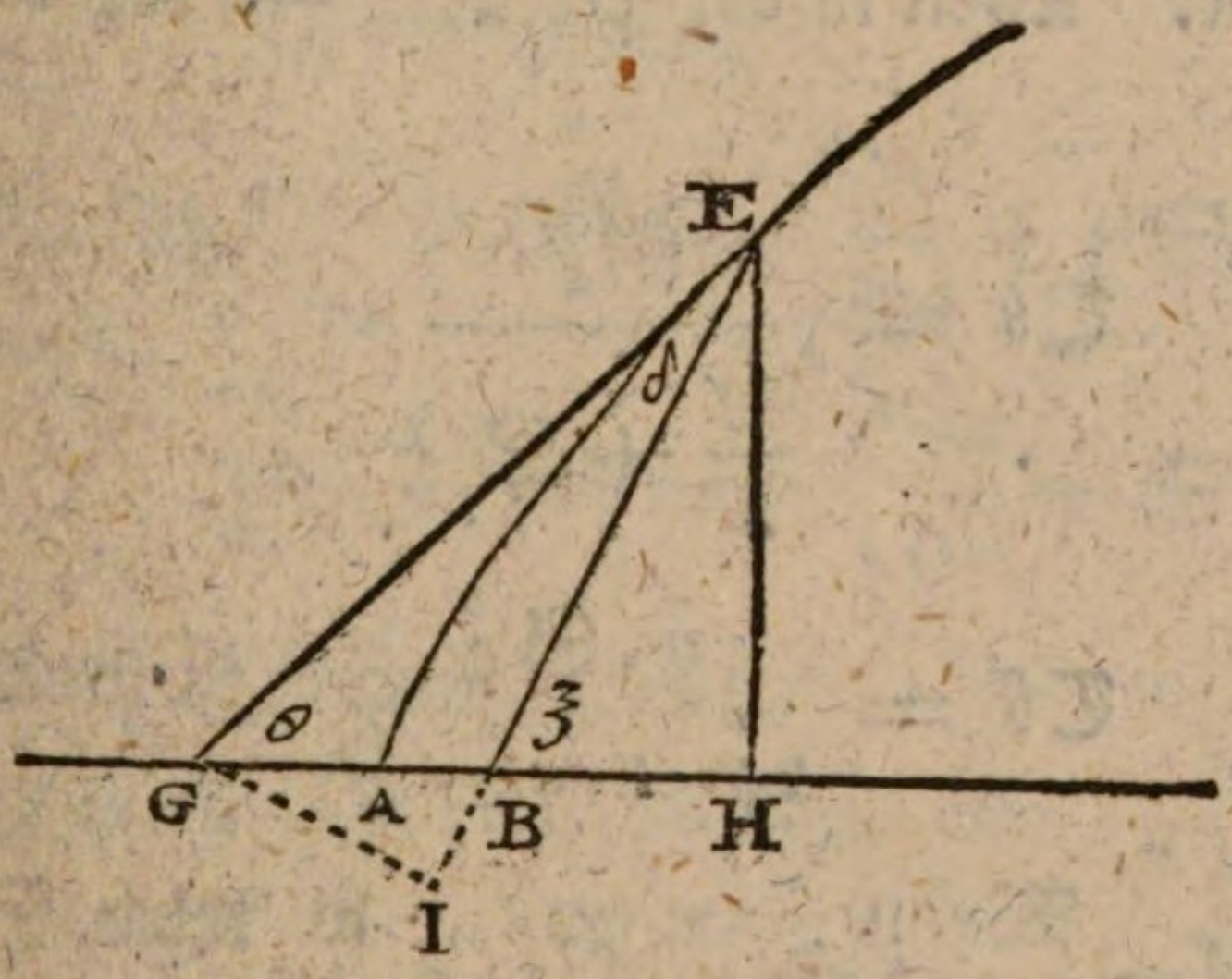
folglich $\mathfrak{T}\delta = \frac{\mathfrak{S}\xi \cdot \frac{dx}{dy}}{1 + \mathfrak{S}'\xi \cdot \frac{dx}{dy}} = \frac{\frac{2y}{a} \cdot \mathfrak{S}\xi}{1 + \frac{2y}{a}\mathfrak{S}'\xi} = \frac{2y \cdot \mathfrak{S}\xi}{a + 2y\mathfrak{S}'\xi}$

Anmerkung. Wenn ξ ein rechter Winkel ist, so ist $\mathfrak{S}\xi = 1$, und $\mathfrak{S}'\xi = 0$, dann wird $\mathfrak{T}\delta = \frac{2y}{a}$, wie schon oben gefunden worden (VIII. H. §4.)

§. 4.

Aufgabe.

Den Winkel θ finden, welchen die Tangente EC mit der Direktrize GB bildet,



Auflösung. Ziehe EH senkrecht auf der Direktrize, so ist

BE, BH :: 1, $\mathfrak{S}$BEH ($= \mathfrak{S}'\xi$)
y, BH :: 1, $\mathfrak{S}'\xi$
BH $= y\mathfrak{S}'\xi$

Ferner ist BE, EH :: 1, $\mathfrak{S}\xi$
y, EH :: 1, $\mathfrak{S}\xi$
daher EH $= y \cdot \mathfrak{S}\xi$

Ferner ist $GH = GB + BH = y\frac{dx}{dy} + y\mathfrak{S}'\xi$, und]

$$GH,\ HE :: 1,\ \mathfrak{T}\theta$$

$$\left(y\frac{dx}{dy} + y\mathfrak{S}'\xi\right),\ y\mathfrak{S}\xi :: 1,\ \mathfrak{T}\theta$$

$$\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right),\ \mathfrak{S}\xi :: 1,\ \mathfrak{T}\theta$$

daher $$\mathfrak{T}\theta = \frac{\mathfrak{S}\xi}{\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi}$$

oder auch $$\mathfrak{T}\theta = \frac{dy.\mathfrak{S}\xi}{dx + dy.\mathfrak{S}'\xi}$$

Exempel. Weil in der Parabel $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$ so ist in derselben

$$\mathfrak{T}\theta = \frac{\mathfrak{S}\xi}{\frac{2y}{a} + \mathfrak{S}'\xi}$$

oder $$\mathfrak{T}\theta = \frac{a.\mathfrak{S}\xi}{2y + a\mathfrak{S}'\xi}$$

Anmerkung. Wenn $\xi = 90^g$, so wird $\mathfrak{S}\xi = 1$, $\mathfrak{S}'\xi = 0$, folglich

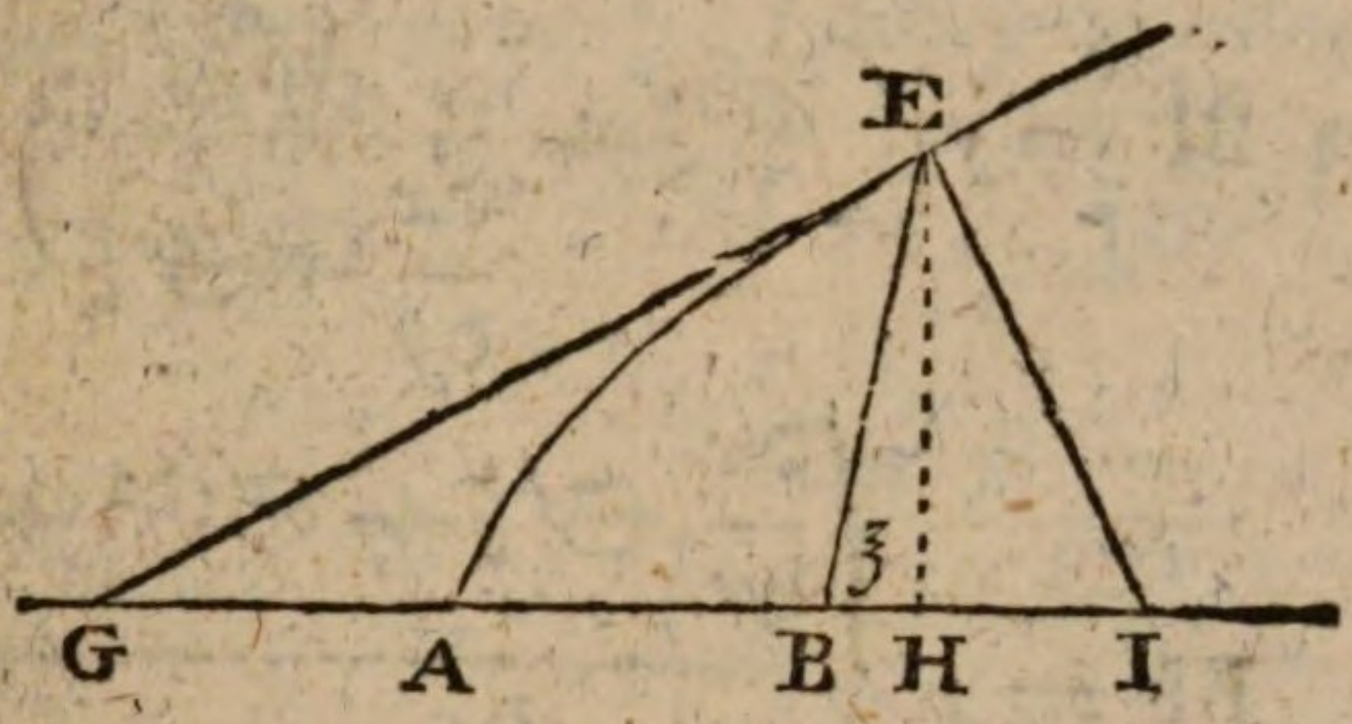
$$\mathfrak{T}\theta\left(= \frac{\mathfrak{S}\xi}{\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi}\right) + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{dy}{dx}$$

und in der Parabel wird

$$\mathfrak{T}\theta\left(= \frac{a\mathfrak{S}\xi}{2y + a\mathfrak{S}'\xi}\right) = \frac{a}{2y}$$

§. 5.

Die Subnormal-Linie einer schiefwinklichen krummen Linie finden.



Auflösung. Wir haben gefunden

$$GB = y\,\frac{dx}{dy}$$

$$BH = y\,S'\xi$$

folglich $GB + BH = y\,\frac{dx}{dy} + y\,S'\xi$

$$GB + BH = y\left(\frac{dx}{dy} + S'\xi\right)$$

Auch ist $HE = y\,S\xi$

Nun ist GH, HE :: HE, HI

$$y\left(\frac{dx}{dy} + S'\xi\right),\ y\,S\xi :: y\,S\xi,\ HI$$

$$\left(\frac{dx}{dy} + S'\xi\right),\ S\xi :: y\,S\xi,\ HI$$

daher ist $HI = \frac{y\,S\xi^2}{\frac{dx}{dy} + S'\xi}$.

Da nun $BH = y\,\mathfrak{S}'\xi$

so ist $BH + HI = y\,\mathfrak{S}'\xi + \dfrac{y\,\mathfrak{S}\xi^2}{\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi}$

oder $BI = y\left(\mathfrak{S}'\xi + \dfrac{\mathfrak{S}\xi^2}{\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi}\right)$

$$BI = y\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\mathfrak{S}'\xi + \mathfrak{S}'\xi^2 + \mathfrak{S}\xi^2}{\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi}\right)$$

Nun ist $\mathfrak{S}'\xi^2 + \mathfrak{S}\xi^2 = 1$, also

$$BI = y\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial y}\mathfrak{S}'\xi + 1}{\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi}\right)$$

oder auch $BI = y\left(\dfrac{\partial x\,\mathfrak{S}'\xi + \partial y}{\partial x + \partial y\,\mathfrak{S}'\xi}\right)$

Exempel In der Parabel ist $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{2}$, also wird, vermöge der ersten Formel

$$BI = y\left(\frac{\frac{2y}{a}\mathfrak{S}'\xi + 1}{\frac{2y}{a} + \mathfrak{S}'\xi}\right)$$

$$= y\left(\frac{2y\cdot\mathfrak{S}'\xi + a}{2y + a\,\mathfrak{S}'\xi}\right)$$

$$= \frac{2y^2\cdot\mathfrak{S}'\xi + ay}{2y + a\,\mathfrak{S}'\xi}$$

Zusatz.

Zusatz. Wenn ξ ein rechter Winkel ist, so wird $\mathfrak{S}'\xi = o$, folglich lich wird überhaupt

$$\mathrm{BI} = y\left(\frac{\frac{dx}{dy}\mathfrak{S}'\xi + 1}{\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi}\right) = y\left(\frac{o+1}{\frac{dx}{dy}+o}\right)$$

$$= y\,\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

$$= y\,\frac{dy}{dx}$$

und insbesondere für die Parabel,

$$\mathrm{BI} = \frac{2y^2.\,\mathfrak{S}'\xi + ay}{2y + a\mathfrak{S}'\xi} = \frac{o+ay}{2y+o} = \frac{ay}{2y} = \frac{a}{2}$$

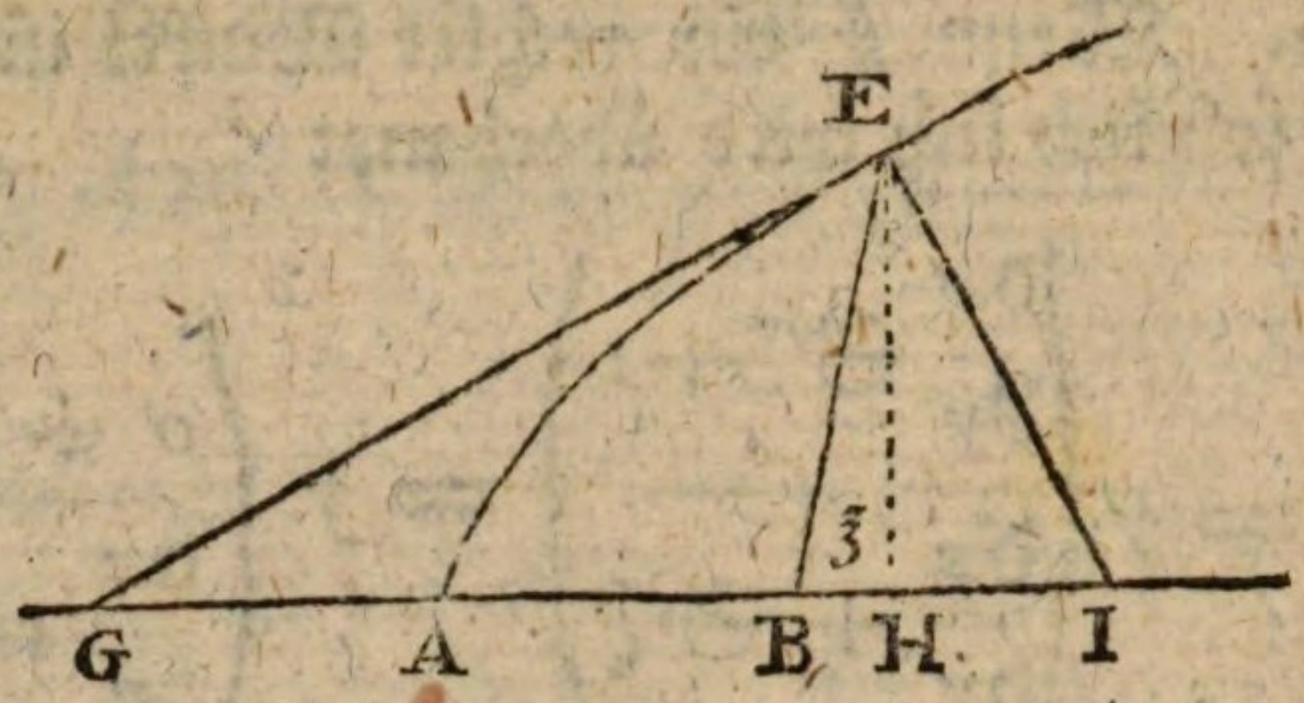
welches vollkommen mit den bekannten Resultaten übereinstimmet. (VIII. H. § 2.)

§. 6.

Die Tangente und die Normale einer schiefwinklichen krummen Linie finden.

Auflösung.

(Siehe die folgende Figur.)



I) Es ist eben gefunden worden $HE = y\,\mathfrak{S}\xi$ und $GH = y\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi\right)$, also

$$HE^2 + GH^2 = y^2\,\mathfrak{S}\xi^2 + y^2\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2$$

$$GE^2 = y^2\left[\mathfrak{S}\xi^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2\right]$$

$$= y^2\left(\mathfrak{S}\xi^2 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial x}{\partial y}\mathfrak{S}'\xi + \mathfrak{S}'\xi^2\right)$$

oder, weil $\mathfrak{S}\xi^2 + \mathfrak{S}'\xi^2 = 1$

$$GE^2 = y^2\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 2.\,\frac{\partial x}{\partial y}.\mathfrak{S}'\xi\right)$$

$$GE = y\sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 2.\,\frac{\partial x}{\partial y}\,\mathfrak{S}'\xi\right)}$$

Wenn $\xi = 90^g$, so wird $\mathfrak{S}'\xi = 0$, folglich ist in diesem Falle $GE = y\sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$. Siehe VIII. Hauptstück § 2.

II) Es ist

$$EI^2 = EH^2 + HI^2$$

Nun

Nun ist $EH = y\,\mathfrak{S}\xi$, und $HI = \dfrac{y\,\mathfrak{S}\xi^2}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}\,\xi\right)}$

Also wird

$$EH^2 + HI^2 = y^2\,\mathfrak{S}\xi^2 + \frac{y^2\,\mathfrak{S}\xi^4}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2}$$

$$EI^2 = y^2\left[\mathfrak{S}\xi^2 + \frac{\mathfrak{S}\xi^4}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}\xi\right)^2}\right]$$

$$EI^2 = y^2 \cdot \frac{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2 \mathfrak{S}\xi^2 + \mathfrak{S}\xi^4}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2}$$

$$EI^2 = y^2 \cdot \frac{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2 + \mathfrak{S}\xi^2}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2} \cdot \mathfrak{S}\xi^2$$

$$EI^2 = y^2\,\frac{\frac{dx^2}{dy^2} + 2 \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \mathfrak{S}'\xi + \mathfrak{S}'\xi^2 + \mathfrak{S}\xi^2}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)^2} \cdot \mathfrak{S}\xi^2$$

$$EI^2 = y^2 \cdot \frac{\frac{dx^2}{dy^2} + 2 \cdot \frac{dx}{dy}\,\mathfrak{S}'\xi + 1}{\left(\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi\right)} \cdot \mathfrak{S}\xi^2$$

$$EI = \frac{y\,\mathfrak{S}\xi}{\frac{dx}{dy} + \mathfrak{S}'\xi} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 2 \cdot \frac{dx}{dy}\,\mathfrak{S}'\xi + 1\right)}$$

Wird nun $\xi = 90°$, so ist $\mathfrak{S}\xi = 1$ und $\mathfrak{S}'\xi = 0$, folglich ist in diesem Falle

$$EI = \frac{y}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$$

$$EI = y \cdot \frac{dy}{dx} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$$

$$EI = y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Welches mit der bekannten Formel übereinstimmet. (VIII. Hauptst. §. 2)

Anmerkung. Wir geben keine Exempel, weil ein jeder sich selbst mit leichter Mühe welche machen kann.

§. 7.

Aufgabe.

Der Halbmesser der Krümmung für eine schiefwinkliche krumme Linie finden.

Auflösung. Wenn in einer rechtwinklichen krummen Linie der Halbmesser der Krümmung r genannt wird, so ist (XI. Hauptst. §7.)

$$r = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

eine Formel in welcher dx als beständig betrachtet wird. Wir wollen sehen, welche Gestalt sie bekommen hätte, wenn auch dx als veränderlich betrachtet würde.

Anstatt

Anstatt des vorigen Ausdruckes wollen wir schreiben

$$r = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

Es sey $\frac{dy}{dx} = p$, und $\frac{dp}{dx} = q$, so wird, wenn dx unveränderlich ist

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx}$$

$$\text{und } \frac{dp}{dx} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{oder } q = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Also läßt sich die lezte Formel also schreiben

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Ist aber dx veränderlich, so wird

$$dp = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{d^3}$$

$$\text{oder } q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2}$$

Setzet

Setzet man diesen Werth von q und den Werth von p, nemlich $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

so kömmt für die Hypothese daß dx eben so wie dy veränderlich sey

$$r = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}}$$

$$\text{oder } r = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x - dx\,d^2y}$$

Nun betrachte man ferner, daß eine schiefwinkliche krumme Linie wie AE (in der vorigen Figur) rechtwinklich wird, wenn man anstatt AB $= x$ und BE $= y$ annimmt AH $= z$ und HE $= u$. Und dieses vorausgesetzet, so wird vermöge unserer lezten Formel

$$r = \frac{(dz^2+du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,d^2z - dz\,d^2u}$$

Man weiß schon aus den vorhergehenden Paragraphen, daß

$$\text{HE} = y\,\mathfrak{S}\xi$$
$$\text{oder } u = y\,\mathfrak{S}\xi$$
$$\text{und AH} = \text{AB} + \text{BH}$$
$$\text{oder } z = x + y\,\mathfrak{S}'\xi$$

Der

Der Winkel ξ, folglich auch $S\xi$, $S'\xi$ sind hier beständige Größen. Man differenzire demnach die Werthe von u und z, so ist

$$u = y.\,S\xi$$

folglich $du = dy.\,S\xi$

$$d^2u = d^2y\,S\xi$$

$$du^2 = dy^2\,S\xi^2$$

ferner da $z = x + y\,S'\xi$

so ist $dz = dx + dy\,S'\xi$

$$d^2z = d^2x + d^2y\,S'\xi$$

$$dz^2 = dx^2 + 2\,dx\,dy\,S'\xi + dy^2\,S'\xi^2$$

$$dz^2 + du^2 = dx^2 + 2dxdyS'\xi + dy^2S'\xi^2 + dy^2S\xi^2$$

$$dz^2 + du^2 = dx^2 + 2\,dxdy\,S'\xi + dy^2(S'\xi^2 + S\xi^2)$$

und weil $S'\xi^2 + S\xi^2 = 1$

$$dz^2 + du^2 = dx^2 + 2\,dx\,dy\,S'z + dy^2$$

Ferner ist

$$du\,d^2z = dy\,d^2x\,S\xi + dy\,d^2y.\,S\xi.\,S'\xi$$

$$dz\,d^2u = dx\,d^2y.\,S\xi + dy\,d^2y.\,S\xi.S'\xi.$$

Folglich

$$du\,d^2z - dz\,d^2u = dy\,dx^2\,S\xi - dx\,d^2y\,S\xi$$

Substituiret man diese Werthe in die Formel

$$r = \frac{(dz^2 + du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,d^2z - dz\,d^2u}$$

so wird

$$r = \frac{(dx^2 + 2\,dx\,dy.\,S'\xi + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{S\xi(dy\,d^2x - dx\,d^2y)}$$

Will man nun wiederum, daß dx beständig sey, so wird $d^2x = o$, folglich

$$r = \frac{(dx^2 + 2dxdy\,S'\xi + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y\,S\xi}$$

$$r = \frac{\left[\left(\frac{dx^2 + 2dxdy\,S'\xi + dy^2}{dx^2}\right)dx^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y\,S\xi}$$

$$r = \frac{\left(1 + 2\frac{dy}{dx}S'\xi + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}(dx^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y\,S\xi}$$

$$r = \frac{\left(1 + 2\frac{dy}{dx}S'\xi + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}dx^3}{-dx\,d^2y\,S\xi}$$

$$r = -\left(1 + 2\frac{dy}{dx}S'\xi + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx^3}{dx\,d^2y\,S\xi}$$

$$r = -\left(1 + 2\frac{dy}{dx}S'\xi + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx^2}{d^2y} \cdot \frac{1}{S\xi}$$

$$r = -\left(1 + 2\frac{dy}{dx}S'\xi + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx^2}{d^2y} \cdot \beta'\xi$$

Exempel. Es sey die gegebene Linie eine Parabel, worinn $y^2 = ax$, so wird

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$, $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{a^2}{4y^2}$. Ferner findet man, wenn dx beständig ist

$$2y\,\partial^2 y + 2\,\partial y^2 = 0$$
$$y\,\partial^2 y + \partial y^2 = 0$$
$$y\,\partial^2 y + \frac{a^2\,\partial x^2}{4y^2} = 0$$
$$4y^3\,\partial^2 y + a^2\,\partial x^2 = 0$$
$$a^2\,\partial x^2 = -4y^3\,\partial^2 y$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial^2 y} = -\frac{4y^3}{a^2}$$

Setzet man diese Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}$ in die Formel

$$r = -\left(1 + 2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\mathfrak{S}'\xi + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}\cdot\mathfrak{B}'\xi$$

so wird

$$r = -\left(1 + \frac{a}{y}\mathfrak{S}'\xi + \frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{4y^3}{a^2}\cdot\mathfrak{B}'\xi\right)$$

$$r = +\left(1 + \frac{a}{y}\mathfrak{S}'\xi + \frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4y^3}{a^2}\,\mathfrak{B}'\xi$$

$$r = \left(\frac{4y^2 + 4ay\mathfrak{S}'\xi + a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4y^2}{a^2}\,\mathfrak{B}'\xi$$

$$r = \frac{(4y^2 + 4ay\mathfrak{S}'\xi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{(4y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{4y^3}{a^2}\cdot\mathfrak{B}'\xi$$

$$r = \frac{(4y^2 + 4ay\mathfrak{S}'\xi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3}\cdot\frac{4y^3}{a^2}\cdot\mathfrak{B}'\xi$$

$$r = \frac{(4y^2 + 4ay\mathfrak{S}'\xi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2}\cdot\mathfrak{B}'\xi$$

$$r = \frac{(4y^2 + 4ay\mathfrak{S}'\xi + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2\mathfrak{S}\xi}$$

Anmerkung I. Wenn $\xi = 90°$, so wird $S'\xi = 0$, $\beta'\xi = 1$, folglich wird die allgemeine Formel

$$r = -\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx^2}{d^2y}$$

und die Formel für die Parabel

$$r = \frac{(4y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2}$$

welches alles mit bekannten Regeln übereinstimmet. (IX. Hauptst. §. 3)

Anmerkung II. Durch eben solche Veränderungen als bei der Formel für den Halbmesser der Krümmung gemacht worden, ließen sich auch die Formeln finden, wornach die Gleichung einer krummen Linie in die Gleichung ihrer Evolute verwandelt wird (IX. H. § 9.), für den Fall, wo die Koordinaten schiefwinklich sind.

§. 8.

Aufgabe.

Die größte oder kleinste Applikate einer schiefwinklichen krummen Linie finden

Auflösung. Die Regeln sind gänzlich die nemlichen, wie bei rechtwinklichen Linien, weil bei denselben der Koordinaten-Winkel gar nicht in Betrachtung kömmt. (X. Hauptst. §. 3.)

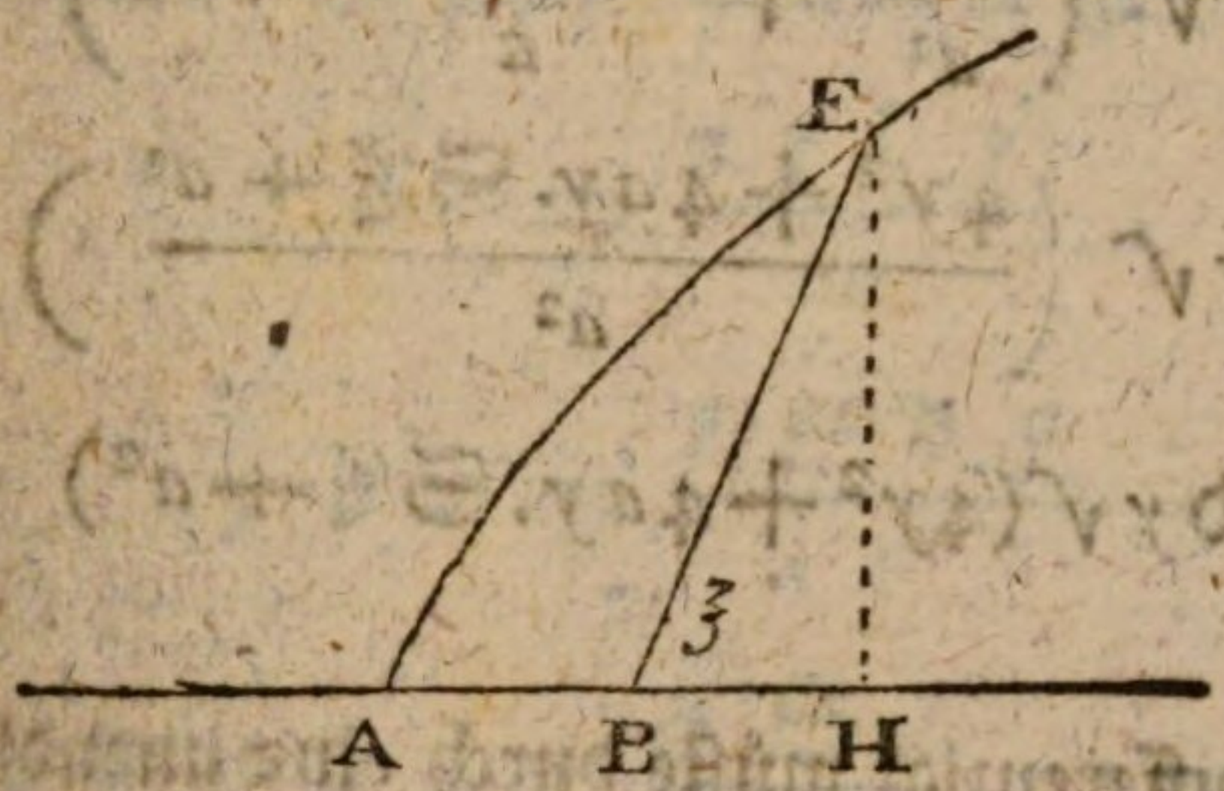
Anmerkung. Eben so verhält es sich mit den Biegungspunkten, wenn dergleichen vorhanden sind. (X. Hauptst. §. 9).

§. 19.

Aufgabe.

Eine schiefwinkliche krumme Linie rektifiziren.

Auflösung.



Es sey $AB = x$, $BE = y$, $AH = \zeta$, $HE = u$,
so ist (XI. H. §2.) $\delta(AE) = \sqrt{(\delta\zeta^2 + \delta u^2)}$

Nun ist
$$\zeta = AB + BH$$
$$\zeta = x + y\,\mathfrak{S}'\xi$$
$$u = EH = y\,\mathfrak{S}\xi$$

daher bekömmt man wie in §. 7.
$$\delta\zeta = \delta x + \delta y.\,\mathfrak{S}'\xi$$
$$\delta u = \delta y.\,\mathfrak{S}\xi$$
$$\delta\zeta^2 + \delta u^2 = \delta x^2 + 2\delta x\,\delta y\,\mathfrak{S}'\xi + \delta y^2$$

Folglich ist
$$\delta(AE) = \sqrt{(\delta x^2 + 2\delta x\,\delta y\,\mathfrak{S}'\xi + \delta y^2)}$$
$$AE = \int\sqrt{(\delta x^2 + 2\delta x\,\delta y\,\mathfrak{S}'\xi + \delta y^2)}$$

Exempel. Es sey $y^2 = ax$, so findet man
$$\delta x = \frac{2y\,\delta y}{a}$$
$$\delta x^2 = \frac{4y^2\,\delta y^2}{a^2}$$

Setzet man diese Werthe in die Formel, so kömmt zu integriren

$$\int \left(\frac{4y^2 . \partial y^2}{a^2} + \frac{4y . \mathfrak{S}'\xi . \partial y^2}{a} + \partial y^2 \right)$$

$$\text{oder} \qquad \partial y \int \left(\frac{4y^2}{a^2} + \frac{4y . \mathfrak{S}'\xi}{a} + 1 \right)$$

$$\text{oder} \qquad \partial y \int \left(\frac{4y^2 + 4ay . \mathfrak{S}'\xi + a^2}{a^2} \right)$$

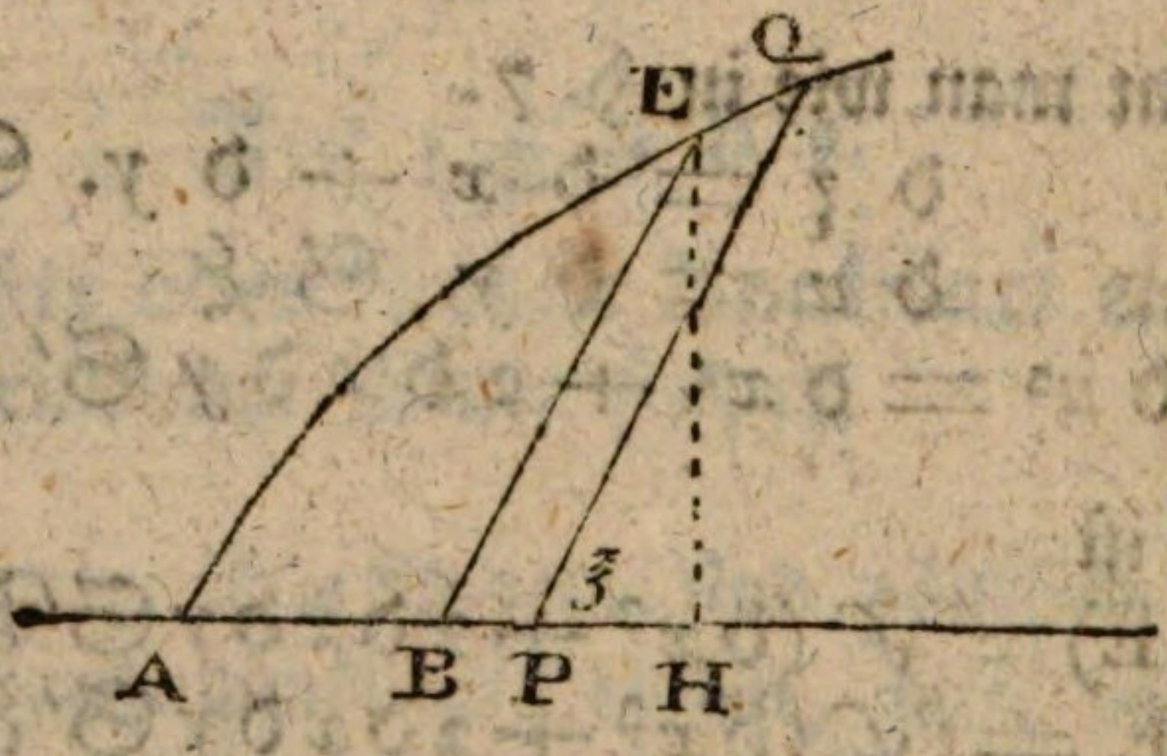
$$\text{oder} \qquad \frac{1}{a} \partial y \int (4y^2 + 4ay . \mathfrak{S}'\xi + a^2)$$

Dieses Differenzial müste durch eine unendliche Reihe ausgedrücket und integriret werden.

§. 10.

Aufgabe.

Eine schiefwinkliche krumme Linie quadriren.



Auflösung. Es sey BEQPB die Differenz der Fläche AEB, so ist der Flächen-Inhalt von BEQPB beinahe gleich BP × EH. Es ist aber BP = Δx und EH = $y\mathfrak{S}\xi$, Folglich ist nächstens

$$\Delta(\text{AEB}) = \Delta x . y\mathfrak{S}\xi$$

oder,

oder, weil es hier nur auf die Gränzen ankömmt,

$$\mathfrak{d}(AEB) = y \mathfrak{S} \xi \mathfrak{d} x$$

$$AEB = \int (y . \mathfrak{S} \xi . \mathfrak{d} x)$$

Exempel. Es sey $y^2 = ax$, so ist

$$\mathfrak{d} x = \frac{2 y \mathfrak{d} y}{a}$$

$$y \mathfrak{d} x = \frac{2 y^2 \mathfrak{d} y}{a}$$

$$y \mathfrak{S} \xi \mathfrak{d} x = \frac{2 \mathfrak{S} \xi}{a} . y^2 \mathfrak{d} y$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{2 \mathfrak{S} \xi . y^3}{3 a} + C$$

oder $$\frac{2 \mathfrak{S} \xi . y^2 . y}{3 a} + C$$

oder $$\frac{2 \mathfrak{S} \xi . a x . y}{3 a} + C$$

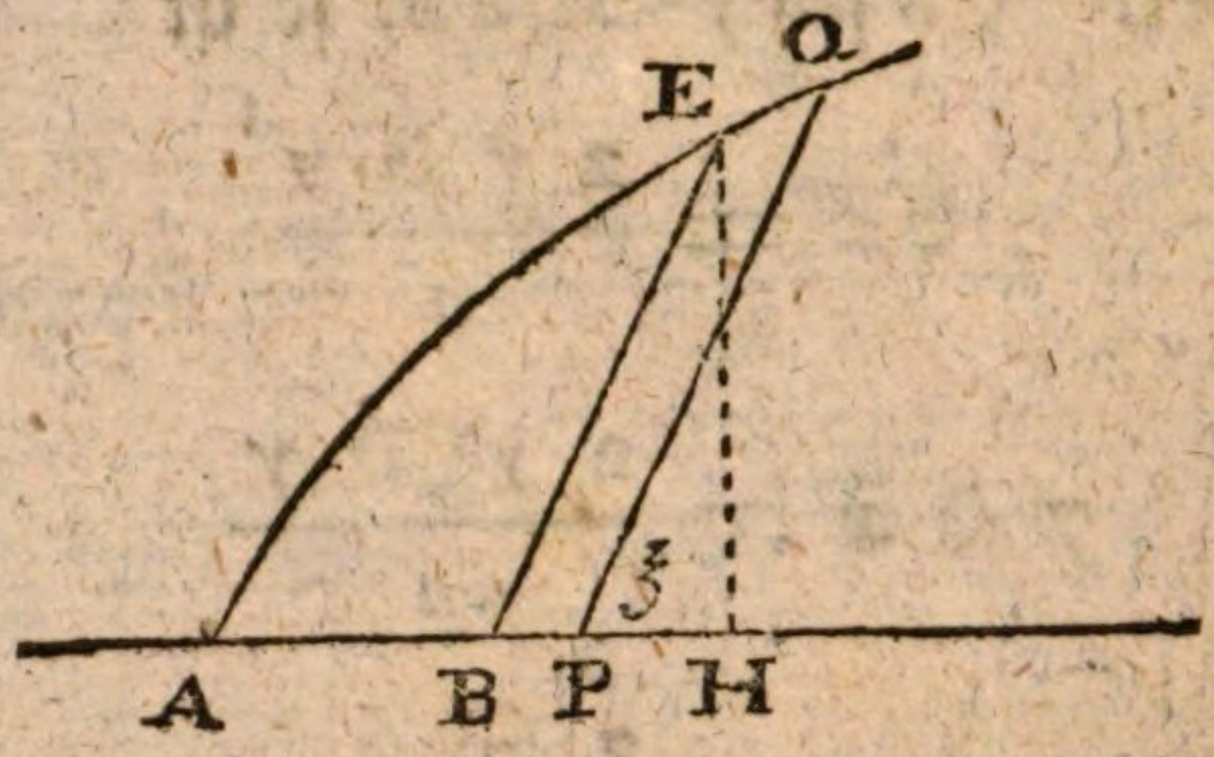
oder $$\frac{2}{3} x y . \mathfrak{S} \xi + C$$

Soll nun die Fläche $= o$ seyn, wenn $x = o$, oder $u = o$, so wird auch $C = o$.

§. 11.

Aufgabe.

Die hohle Fläche berechnen, welche entstehet, wenn eine schiefwinkliche krumme Linie sich um ihre Direktrize herum drehet.



Auflösung. Wenn Q die runde Fläche ist, die von einer rechtwinklichen krummen Linie erzeuget wird, so ist (XI. Hauptst. §. 6.)

$$\partial Q = 2\pi y \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$$

wo angenommen wird, daß sich im Zirkel der Durchmesser zur Peripherie verhalte, wie 1 zu π.

Wird demnach bei der vorigen Figur angenommen, daß $AH = z$ und $HE = u$, so ist

$$\partial Q = 2\pi u \sqrt{(\partial z^2 + \partial u^2)}$$

Es ist aber $EH = u = y\,\mathfrak{S}\xi$, und $z = AH = AB + BH = x + y\,\mathfrak{S}'\xi$, folglich $\partial z = \partial x + \partial y . \mathfrak{S}'\xi$, woraus also entstehet

$$\partial Q = 2\pi y\,\mathfrak{S}\xi \sqrt{(\partial x^2 + 2\,\partial x\,\partial y\,\mathfrak{S}'\xi + \partial y^2)}$$

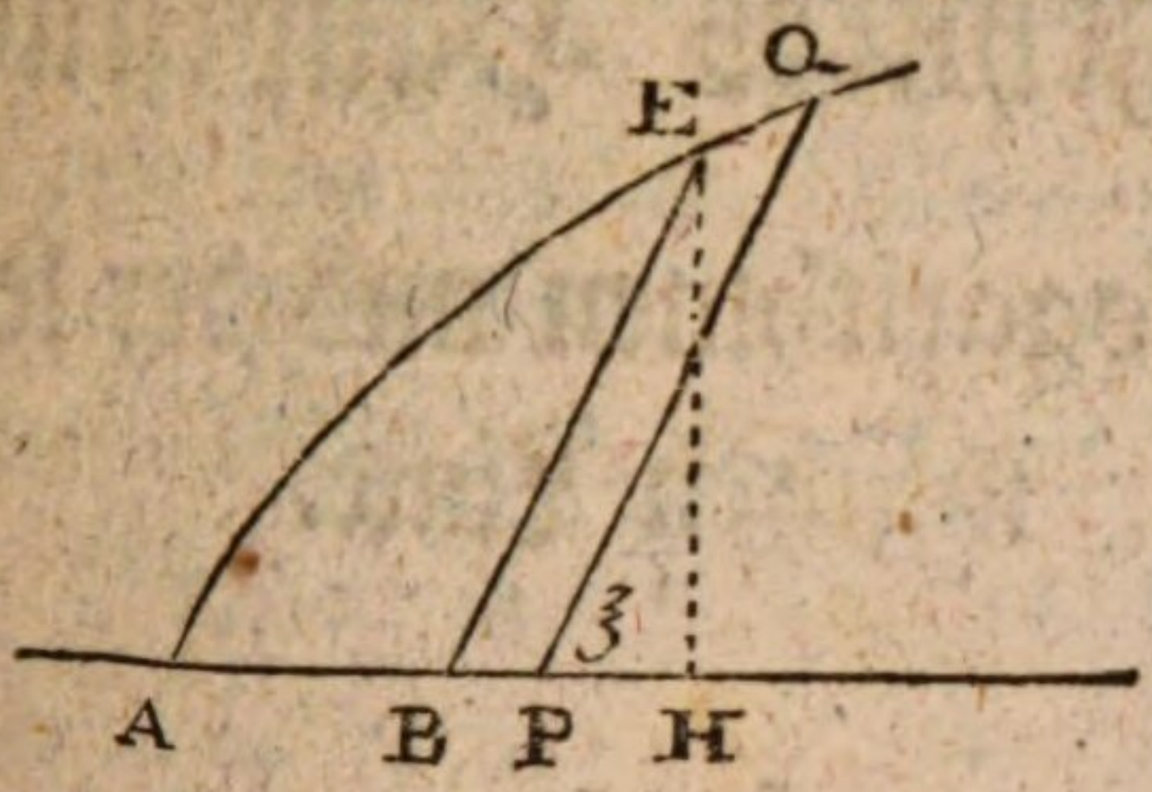
welche Formel integriret werden muß, wenn man Q oder die runde Fläche finden will.

§. 12.

§. 12.

Aufgabe.

Eine schiefwinkliche krumme Linie kubiren.



Auflösung. Es sey $AH = z$, $HE = u$, und der durch die Umwendung der Ebne AHE beschriebene Körper $= S$, so ist (XI. Hauptst. §. 8.)

$$\partial S = \pi u^2 \partial z$$

nun ist, wie vorher, $u = y \mathfrak{S} \xi$, und $z = x + y \mathfrak{S}' \xi$, also wird

$$\partial S = \pi y^2 \mathfrak{S} \xi^2 (\partial x + \partial y \mathfrak{S}' \xi)$$

welches Differenzial integriret werden muß, um den durch die Umwendung der Fläche AHE beschriebenen Körper zu bekommen. Wollte man nur den von der Fläche AEB erzeugten Körper haben, so müßte man vom Integral den vom Dreiecke BHE erzeugten Kegel subtrahiren. Der Durchmesser seiner Grundfläche ist $2y$, folglich der Umfang der Grundfläche $2\pi y$, der Flächen-Inhalt $2y\pi \times \frac{1}{2}y = y^2\pi$, die Höhe des Kegels $BH = y \mathfrak{S}' \xi$, folglich der Inhalt des Kegels $\pi y^2 \times \frac{1}{3} y \mathfrak{S}' \xi = \frac{1}{3} \pi y^3 \mathfrak{S}' \xi$

Dreizehntes Hauptstück.

Von den Logarithmen und der logarithmischen Linie.

§. 1.

Alle Größen, die der Berechnung unterworfen sind, können algebraische Größen genannt werden. Jedoch giebt man in einem engeren Verstande diesen Namen nur solchen Größen, die unter den bekanntesten Gestalten erscheinen, nemlich als Summen, Differenzen, Produkte, Quozienten, Potenzen mit unveränderlichen Exponenten, Wurzeln ebenfalls mit unveränderlichen Wurzel-Exponenten. Hingegen giebt es noch andere Größen, welche nicht so allgemein bekannt sind, und die daher transzendente Größen, das ist, Größen von einer höhern Art, genannt werden. Dergleichen sind die Größen mit veränderlichen Exponenten und die damit verwandten Logarithmen. Hiervon wollen wir in diesem Hauptstücke handeln, weil solche Größen dann und wann in den Gleichungen der krummen Linie vorkommen.

§. 2.

Wenn man die auf einander folgenden Potenzen einer Zahl betrachtet, so wird man bald gewahr, daß solche Potenzen eine geometrische Progreßion bilden, da hingegen ihre Exponenten in arithmetischer Progreßion fortschrei-

schreiten. Z. E. Die Wurzel mag seyn a, so bekömmt man folgende Reihen von Potenzen und Exponenten.

Potenzen: $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8$, &c.

Exponenten: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

Man gebe dem a einem bestimmten Werth, z. E. $a = 2$, so bekömmt man

Potenzen: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ &c.

oder: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, &c.

Exponenten: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

Wenn man die Exponenten unter diesem Gesichts-Punkte betrachtet, so werden sie Logarithmen der zustimmenden Sätze der geometrischen Progreßion genannt. Z. E. Im ~~ersten~~ Exempel ist 0 der Logarithmus von 1, 1 ist der Logarithmus von 2, 2 ist der Logarithmus von 4, 3 ist der Logarithmus von 8, 4 ist der Logarithmus von 16. Hingegen werden die Sätze in der geometrischen Progreßion, oder die Potenzen, Proporzional-Zahlen genannt. Also ist z. E. 8 die Proporzional Zahl für den Logarithmus 3, 16 ist die Proporzional-Zahl für den Logarithmus 4, u. s. f.

Uebrigens wird vorausgesetzet, daß die geometrische Progression hier allemal mit 1 und die arithmetische allemal mit 0 anfängt weil $a^0 = 1$, es mag a seyn welche Zahl man will. (VII. H. § 3.)

Den Logarithmus einer Zahl finden, heißt also eigentlich weiter nichts, als den Exponenten finden, der da anzeiget, zur wie vielten Potenz eine gewisse unveränderliche Zahl erhoben werden muß, wenn sie einer gegebenen Zahl gleich werden soll. Z. E. Wenn in der lezt angeführ-

führten Progreßion nach dem Lagarithmus von 128 gefraget wird, so ist die Antwort, 7. Dieses heißt also, daß die unveränderliche Zahl 2, die in der geometrischen Progreßion zum Grunde angenommen worden, zur 7ten Potenz erhoben werden muß, um daß 128 herauskomme.

§. 3.

Man wird leicht begreifen, daß zwischen den Sätzen der geometrischen Progreßion, wiederum mittlere Proporzional-Zahlen eingeschaltet werden können, daß diese alsdann gebrochene Exponenten oder Logarithmen haben werden, , und daß solche gebrochene Exponenten oder Logarithmen mit dem schon vorhandenen wiederum eine arithmetische Progreßion ausmachen werden. Z. E. Wenn solche Einschaltung in der Progreßion a^0, a^1, a^2, u. s. f. geschiehet, so bekömmt man

Proporz.Zahlen: $a^0, a^{\frac{1}{2}}, a^1, a^{\frac{3}{2}}, a^2, a^{\frac{5}{2}}, a^3, a^{\frac{7}{2}}, a^4$, &c.

Logarithmen: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$, &c.

Eben so kann die Einschaltung zum zweitenmale geschehen.

Prop. Zahl. $a^0, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{4}}, a^1, a^{\frac{5}{4}}, a^{\frac{3}{2}}, a^{\frac{7}{4}}, a^2$, &c.

Logar. $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$, &c.

Und so kann man ohne Ende immer mehr und mehr neue Sätze einschieben.

Der Werth von a mag demnach seyn wie man will, so kann jede Zahl als ein Glied der gegebenen Progreßion angesehen werden, weil sie allemal als irgend eine ganze oder gebrochene Potenz des a betrachtet werden kann.

§. 4.

§. 4.

Die Zahl, welche in der anfänglich angenommenen geometrischen Progression unmittelbar nach der Einheit folget, das heißt, welche die gemeinschaftliche Wurzel aller übrigen Sätze ist, wird die Grundzahl oder Basis genannt, und ein Logarithmen-System, ist der Inbegriff aller möglichen Logarithmen, die sich auf die nemliche Grundzahl beziehen.

Und da eine jede beliebige Zahl zur Grundzahl angenommen werden kann, so siehet man, daß unendlich viel Logarithmen-Systeme möglich sind.

§. 5.

Das bekannteste System heißt das Briggische, weil der Engländer Brig's es am ersten berechnet hat. Die Grundzahl darin ist 10, und es ist also auf folgender Progression gegründet:

10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, &c.

oder 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, &c.

Log. 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Die Zahlen, welche zwischen 1 und 10, 10 und 100, 100 und 1000, u. s. f. fehlen, können, vermöge der obigen Erklärungen, keine andere als gebrochene Logarithmen haben. Zu mehrerer Bequemlichkeit werden sie in Dezimal-Brüchen ausgedrücket. Die ganze Zahl, welche bei denselben voranstehet, heißt die Charakteristik oder der Index oder die Kennziffer, weil man daran erkennet, zwischen welchen Sätzen der Progreßion die gesuchte Zahl oder der gegebene Logarithmus fällt.

Für die Zahlen zwischen 1 und 10 wird demnach die Kennziffer 0 seyn, 1 zwischen 10 und 100, 2 zwischen 100 und 1000, 3 zwischen 1000 und 10000, u. s. f.

Logarithmentafeln sind solche Bücher, worin die Logarithmen vieler Zahlen für ein gewisses System berechnet sind. Die gewöhnlichen kleineren Tafeln sind nach dem Briggischen Systeme eingerichtet, und pflegen die Zahlen von 1 bis 10000, und folglich die Logarithmen von 0 bis 4 zu enthalten.

§. 6.

Wir wollen in der Folge den Logarithmus einer Zahl durch L andeuten. Also soll L b so viel bedeuten, als der zur Zahl b gehörige Logarithmus, und wenn nicht ausdrücklich von einem anderen Systeme geredet wird, so soll allemal das Briggische verstanden werden. Hingegen die zu einem Logarithmus gehörige Proporzional-Zahl, wollen wir, wo es nöthig seyn wird, durch NL (Numerus Logarithmi) andeuten. Z. E. NL q ist die Proporzional-Zahl, die zum Logarithmus q gehöret, und dieses im Briggischen Systeme, wenn kein anderes vorgeschrieben wird.

§. 7.

Die bekanntesten Eigenschaften der Logarithmen, wenn sie zum nemlichen Systeme gehören, sind folgende.

I) Die Summe zweier Logarithmen giebt den Logarithmus des Produkts beider Proporzional-Zahlen. Z. E.

$$\mathrm{L}\, c + \mathrm{L}\, b = \mathrm{L}\, (cb)$$

II) Die Differenz zweier Logarithmen giebt den Logarithmus des Quozienten beider Proporzional-Zahlen. Z. E.

$$\mathrm{L}\, c - \mathrm{L}\, b = \mathrm{L}\, \frac{c}{b}$$

III)

III) Wenn man einen Logarithmus mit einer Zahl n multipliziret, so bekömmt man den Logarithmus der $n$ten Potenz der Proporzional-Zahl. Z. E. $n \mathfrak{L} b = \mathfrak{L}(b^n)$

IV) Wenn man einen Logarithmus durch eine Zahl n dividiret, so bekömmt man den Logarithmus der $n$ten Wurzel der Proporzional-Zahl. Z. E.

$$\frac{\mathfrak{L}\, b}{n} = \mathfrak{L}\,(\sqrt[n]{b})$$

Diese vier Sätze fließen aus der Natur der Logarithmen. Dann es sey die Basis des Systems a, es sey ferner $c = a^r$ und $b = a^s$, so ist (VII. Hauptst. §. 2.)

$$a^{r+s} = a^r \times a^s$$
$$a^{r-s} = a^r : a^s$$
$$a^{n\,s} = (a^s)^n$$
$$a^{\frac{s}{n}} = \sqrt[n]{a^s}$$

Hieraus siehet man deutlich, daß die Exponenten (welche mit den Logarithmen einerlei sind) den gegebenen Regeln folgen.

§. 8.

Wenn man die Folge der Potenzen von a rückwärts unter der Einheit fortsetzet, so bekömmt man negative Logarithmen, deren Proporzionalzahlen Brüche sind. Z. E.

&c.... a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, &c.

Log. — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, &c.

Es sey $a = 2$, so hat man folgende Reihe

&c.... 2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, &c.

oder $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 &c.

Log. — 5, — 4, — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, &c.

Also,

Also, wenn die Basis 2 ist, so ist $\mathfrak{L}\frac{1}{32} = -5$, $\mathfrak{L}\frac{1}{16} = -4$, u. s. f. Welches auch aus den allgemeinen Lehren fließet. Denn es ist $\mathfrak{L}\frac{1}{32} = \mathfrak{L}1 - \mathfrak{L}32$. Es ist aber $\mathfrak{L}1 = 0$, also ist $\mathfrak{L}\frac{1}{32} = -\mathfrak{L}32$, und weil hier $\mathfrak{L}32 = 5$, so ist $-\mathfrak{L}32 = -5$

Uebrigens verfährt man mit negativen Logarithmen eben so wie mit positiven, weil die positiven und negativen Potenzen einer Zahl auf einerlei Art behandelt werden.

§. 9.

Da also die Proporzional-Zahlen nichts anders sind als die verschiedenen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Potenzen der Grundzahl, so kann jedes logarithmische System durch diese Gleichung vorgestellet werden $y = a^x$ Hier ist a die Grundzahl, x der Exponent oder Logarithmus, dem man alle mögliche Werthe geben kann, und y ist die Proporzional-Zahl, welche entstehet, wenn a zur $x$ten Potenz erhoben wird.

Wenn man demnach eine solche Gleichung findet, so kann man sie in diese verwandeln

$$x = \mathfrak{L}y$$

wohl verstanden für die Basis a.

Man merke hierbei, daß eine Größe wie a^x mit einem veränderlichen Exponenten, eine Exponenzial-Größe genannt wird. Hingegen eine Größe die das logarithmische Zeichen $\mathfrak{L}$ enthält, wie $\mathfrak{L}y$, heißt deswegen eine logarithmische Größe.

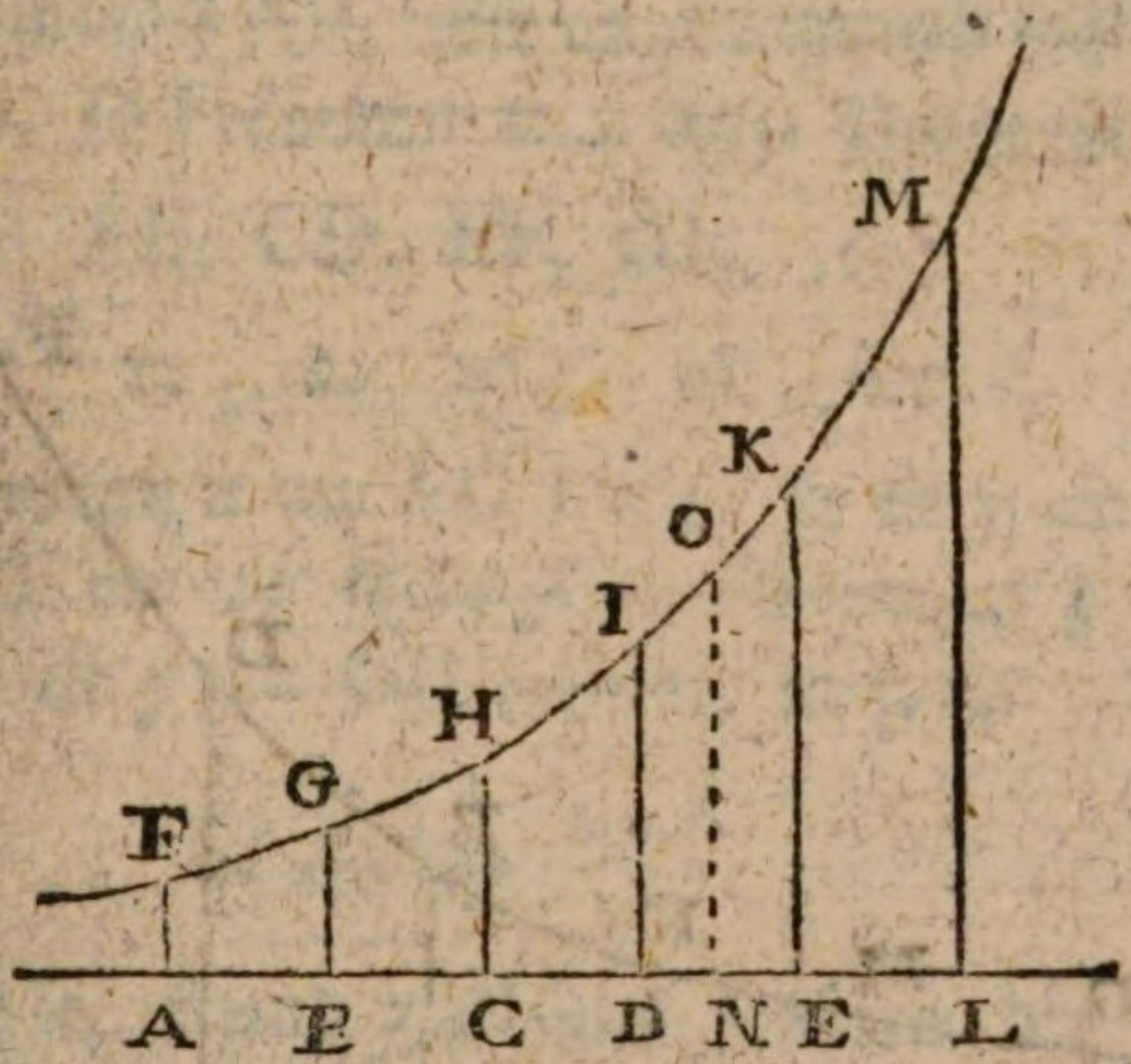
§. 10.

Dieses wenige haben wir hier von den Logarithmen erinnern wollen, um den Anfängern die Mühe zu erspa-

ren es vielleicht in arithmetischen oder algebraischen Büchern nachzuschlagen, wo ausserdem die Lehre von den Logarithmen nicht allemal aus dem wahren Gesichtspunkte betrachtet wird. Um diese Lehre noch mehr zu erläutern, ist von den Geometern die logarithmische Linie erdacht worden, womit wir jezt den Leser bekannt machen wollen.

§. 11.

Auf eine beliebige Direktrisse AL trage lauter gleiche Theile AB, BC, CD, DE, EL, &c. Errichte über den

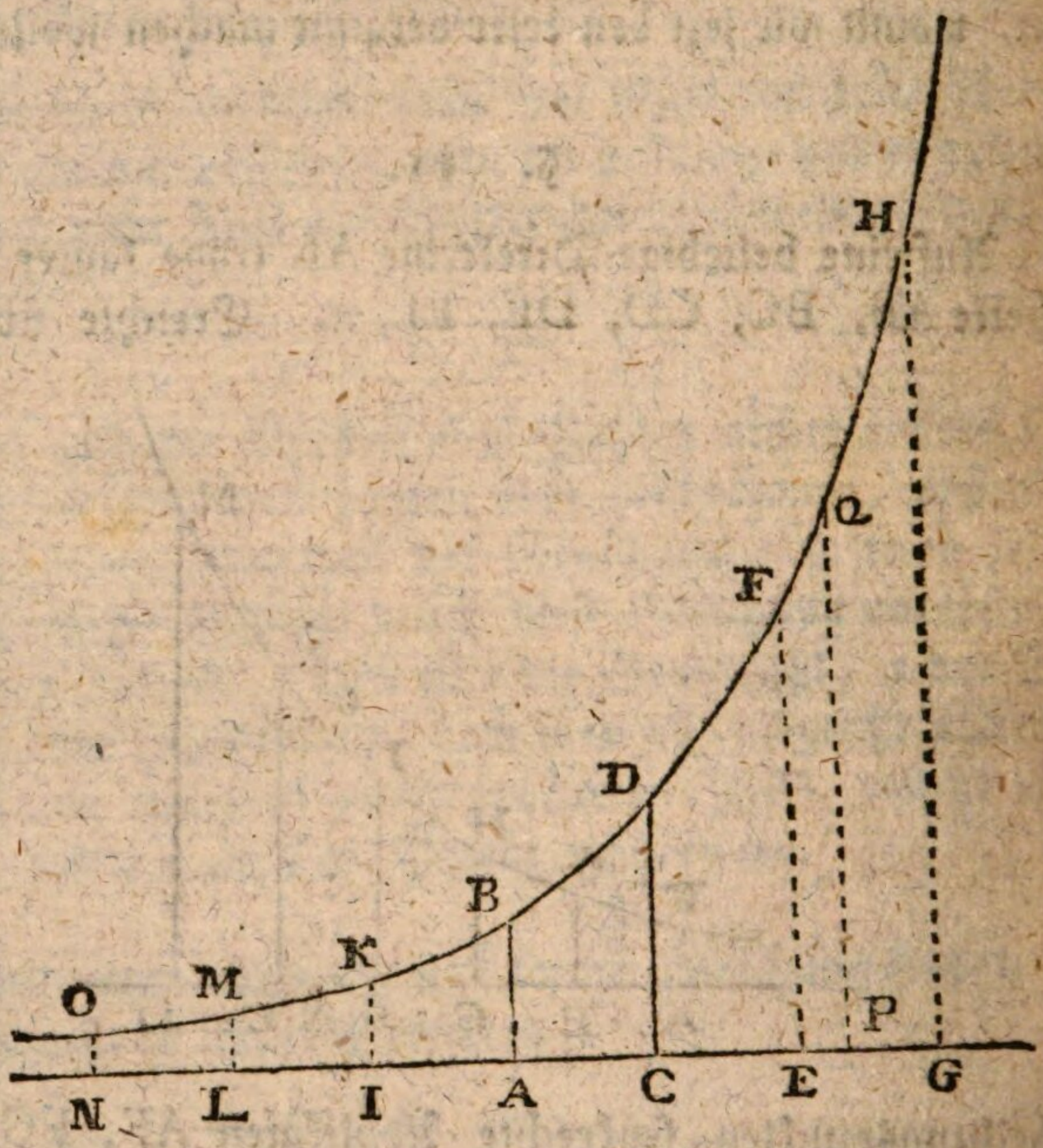


Theilungspunkten senkrechte Applikaten AF, BG, CH, DI, EK, LM, &c. die in einer geometrischen Progression zunehmen oder abnehmen. Durch die Enden dieser Applikaten ziehe eine krumme Linie FM, so wird diese eine logarithmische Linie genannt.

Willst du mehrere Punkte derselben bestimmen, so suche zwischen jeder Applikate und der nächstfolgenden, z. E. zwischen DI und EK die mittlere Proporzional-Linie NO, und errichte sie in der Mitte des Theiles DE der Direktrisse. Dieses Verfahren kann so oft wiederholet werden, als man will. Die Direktrisse bekömmt dabei allemal gleiche

Theile, und die Applikaten folgen immer in geometrischer Progreßion.

§. 12.



Es sey eine logarithmische Linie OH gegeben. Gesetzet nun, man nehme eine der Applikaten AB zur Einheit an. Man trage diese AB einigemal auf die Direktrisse in AC, CE, EG. ꝛc. desgleichen in AI, IL, LN ꝛc. Man ziehe die Applikaten CD, EF, GH, ꝛc. desgleichen IK, LM, NO, ꝛc.

Wann dieses geschehen, so werden die Abzissen, wenn man sie von A aus rechnet, die Logarithmen der Applikaten vorstellen, und es wird CD die Basis oder Grundzahl des Systems seyn.

Denn

Denn weil die Linie so beschrieben worden, daß die Applikaten, die in gleicher Entfernung auf einander folgeten, eine geometrische Progreßion bildeten, so fehlen zwischen AB und CD eben so viel Sätze, als zwischen CD und EF, zwischen EF und GH, ꝛc.

Wenn man aber in einer geometrischen Progreßion allemal gleich viel Zwischen-Sätze ausläßt, so machen die bleibenden Sätze wiederum eine geometrische Progreßion.

Es sey demnach AB, wie angenommen worden, $= 1$, und CD $= a$, so bekömmt man diese Progreßion:

$\div\div$ AB, CD, EF, GH, ꝛc.

$\div\div$ $1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3,$ &c.

Das heißt, wenn $x =$ AC $= 1$, so ist $y =$ CD $= a$; wenn $x =$ AE $= 2$, so ist $y =$ EF $= a^2$; wenn $x =$ AG $= 3$, so ist $y =$ GH $= a^3$, u. s. f. Es ist also überhaupt

$$y = a^x$$

Hier sind a, x und y allemal Zahlen die eine gewisse Einheit AB oder AC zum Grunde haben. Es ist eben nicht nöthig, daß die Einheit der Applikaten die nemliche als die Einheit der Abzissen sey; wir haben diese Gleichheit der Einheiten nur um mehrerer Deutlichkeit willen angenommen.

Nichts verhindert, daß x auch ein Bruch sey. Man nehme z. E. $x =$ AP $= 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, so wird zu diesem Werthe von x eine Applikate PQ gehören, die entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn kann, und es wird seyn $y = a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7}$

Die Abzissen können ferner auch negativ genommen werden, das ist, in entgegengesezter Richtung, z. E. $x =$ AI $= -$ 1, oder $x =$ AL $= -$ 2, oder $x =$ AN $= -$ 3, u. s. f. Dann werden die Applikaten IK, LM, NO, kleiner als AB oder als 1, das ist, sie werden Brüche. Also, wenn z. E. $y = x^{-3}$, so ist y ein Bruch der kleiner als 1 ist.

Dieses alles stimmet vollkommen mit demjenigen überein, was wir kurz vorher von den Logarithmen und den dazu gehörigen Proporzional-Zahlen gelehret haben.

§. 13.

Aufgabe.

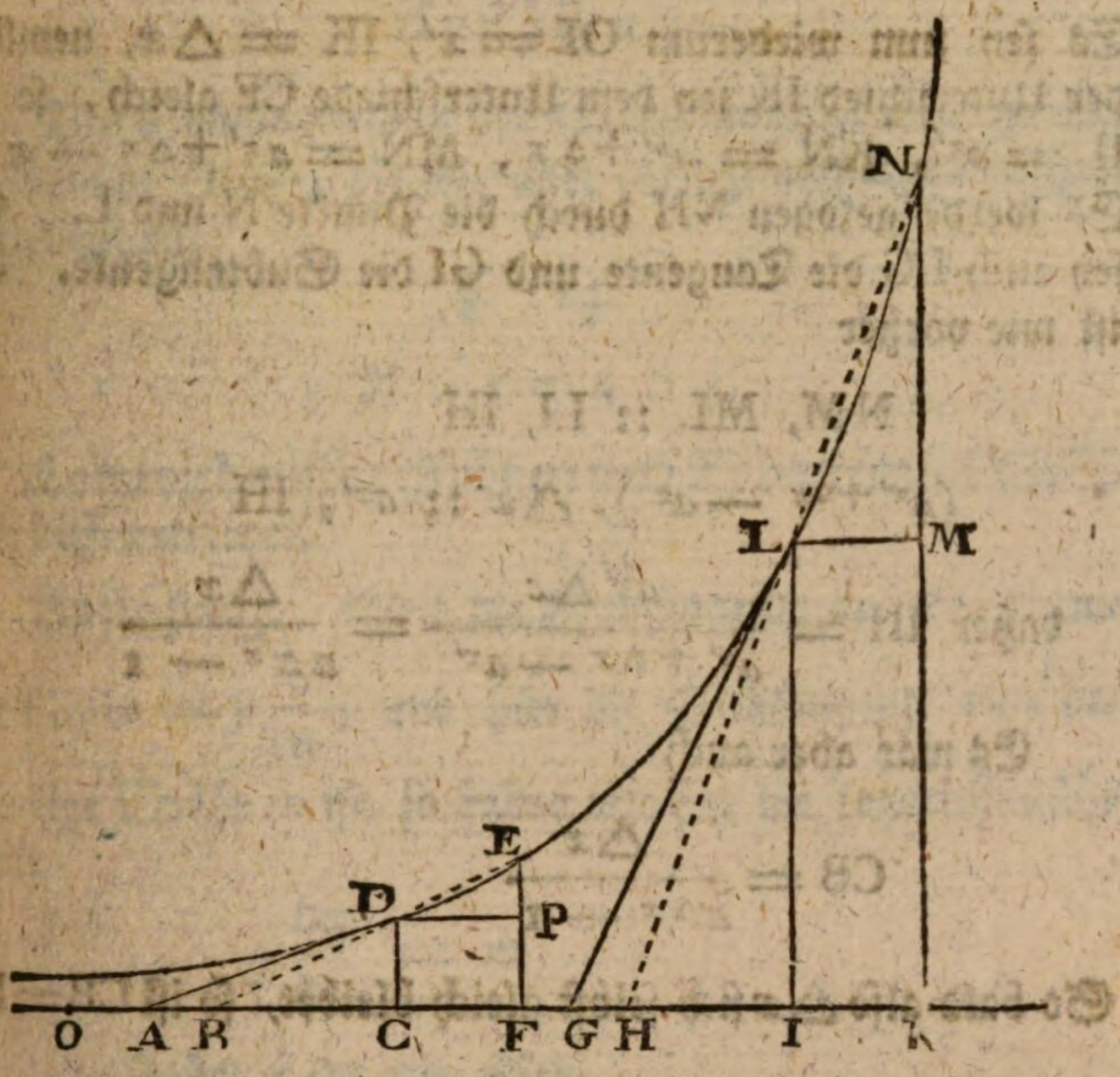
Man soll die Subtangente in einer logarithmischen Linie finden.

Vorbereitung. Wir haben zwar eine allgemeine Formel um die Subtangente jeder krummen Linie zu finden, nemlich es ist (VIII. H. § 2.)

$$\text{die Subtangente} = y \frac{dx}{dy}$$

Also müste man die Gleichung $y = a^x$ differenziren, um die Formel zu gebrauchen. Die gemeinen Regeln der Differenzial-Rechnung erstrecken sich aber nicht bis auf solche Größen, die einen veränderlichen Exponenten haben. Wir müßen demnach einen andern Weg versuchen.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey DA die Tangente für den Punkt D der logarithmischen Linie, folglich AC die Subtangente. Es seyen OC und OF zwei Abzissen, CD und FE die dazu gehörigen Applikaten, DP sey mit CF parallel. Es werde gezogen die gerade EB durch die Punkte E und D.

Vermöge der Natur dieser krummen Linie ist $CD = a^x$ folglich auch $FE = a^x + \Delta^x$. Nun ist

$$EP, PD :: DC, CB$$

$$\Delta(a^x), \Delta x :: a^x, CB$$

Es ist aber $\Delta(a^x) = a^x + \Delta^x - a^x$, also ist

$$(a^x + \Delta^x - a^x), \Delta x :: a^x, CB$$

daher wird

$$CB = \frac{a^x \Delta x}{a^x + \Delta^x - a^x} = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$$

Es sey nun wiederum OI $= x'$, IK $= \Delta x$, nemlich der Unterschied IK sey dem Unterschiede CF gleich, so ist IL $= a^{x'}$, KN $= a^{x'+\Delta x}$, MN $= a^{x'+\Delta x} - a^{x'}$. Es werde gezogen NH durch die Punkte N und L. Es sey auch LG die Tangente und GI die Subtangente. Es ist wie vorher

$$\text{NM, ML :: LI, IH}$$

$$(a^{x'+\Delta x} - a^{x'}),\ \Delta x :: a^{x'},\ \text{IH}$$

$$\text{daher IH} = \frac{a^{x'}\Delta x}{a^{x'+\Delta x} - a^{x'}} = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$$

Es war aber auch

$$\text{CB} = \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1}$$

So bald also Δx sich selbst gleich bleibet, so ist CB $=$ IH.

Nimmt man nun an, daß Δx beiderseits immer kleiner und kleiner werde, jedoch allemal beiderseits mit gleichen Schritten abnehme, so nähert sich CB je mehr und mehr der Subtangente CA, deren Größe sie jedoch nicht erreichen kann, so lange Δx noch einen geltenden Werth behält. Eben so nähert sich IH der Subtangente IG.

Weil demnach allemal CB $=$ IH, so sind auch deren Gränzen gleich, nemlich, es ist CA $=$ IG, das heißt, beide Subtangenten sind gleich; und da der nemliche Beweis an allen Orten der krummen Linie angebracht werden kann, so folget, daß in der logarithmischen Linie die Subtangente eine beständige Größe ist, deren Werth von der Größe der Grundzahl a abhängt, die in der Gleichung $y = a^x$ enthalten ist.

Auflösung.

Die Subtangente in der logarithmischen Linie ist eine beständige Größe, die wir aber für jezt noch nicht bestimmen können.

§. 14.

Aufgabe.

Logarithmische Größen und Exponenzial-Grössen differenziren.

Auflösung. Weil die Subtangente in jeder krummen Linie $= y\frac{dx}{dy}$, und hier die Subtangente eine beständige Größe m ist, so haben wir für die logarithmische Linie

$$y\frac{dx}{dy} = m$$

daher $y\,dx = m\,dy$

Daraus ziehen wir folgende Differenzial-Formeln

I) $dx = \frac{m\,dy}{y}$

oder weil $x = \mathfrak{L}y$

$$d\,\mathfrak{L}y = \frac{m\,dy}{y}$$

II) $dy = \frac{y\,dx}{m}$

oder weil $y = a^x$

$$d(a^x) = \frac{a^x\,dx}{m}$$

Zusatz I. Weil die Logarithmen-Systeme ins unendliche verändert werden können, so muß es auch eines ge-

ben, worinn die Subtangente der Einheit gleich ist. In diesem Falle wird $m = 1$ und kömt in vorigen Formeln nicht zum Vorschein. Das System, wo $m = 1$ muß eine gewisse Basis oder Grundzahl haben, die wir noch nicht kennen, die wir aber unterdessen mit e bezeichnen wollen. Dieses System wo $m = 1$ wird das System der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen genannt. Diesen lezten Namen bekommen sie daher, weil sie zugleich die Quadratur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten geben, wie wir bald sehen werden.

Die Gleichung der logarithmischen Linie, die das natürliche System vorstellet, ist demnach $y = e^x$. Obige Differenzial-Verhältniße bekommen hier folgende Gestalt, wenn der natürliche Logarithmus mit l bezeichnet wird.

weil $m = 1$,

so ist $\delta l y = \frac{\delta y}{y}$

$$\delta(e^x) = e^x \delta x$$

§. 15.

Aufgabe.

Logarithmische und exponentiale Differenzial-Funkzionen integriren.

Auflösung.

I) Weil (§. 14)

$$\delta \mathrm{L}\, y = \frac{m \delta y}{y}$$

so ist $\mathrm{L}\, y = \int \frac{m \delta y}{y}$

das

das heißt, das Integral von $\frac{m \, \partial \, y}{y}$ ist der Logarithmus des y, in einem Systeme, dessen Subtangente m ist.

II) Weil (§ 14.)

$$\partial \, (a^x) = \frac{a^x \, \partial \, x}{m}$$

so ist $$a^x = \int \frac{a^x \, \partial \, x}{m}$$

oder $$a^x = \frac{1}{m} \int a^x \, \partial \, x$$

oder $$m . a^x = \int a^x \, \partial \, x$$

das heißt, das Integral von $a^x \, \partial \, x$ ist die Proporzional-Zahl a^x, für die Grundzahl a, welche Proporzionalzahl noch mit dem Modulus m multipliziret werden muß.

III) Weil im natürlichen Systeme

$$\partial \, l \, y = \frac{\partial \, y}{y}$$

so ist im natürlichen Systeme

$$\int \frac{\partial \, y}{y} = l \, y$$

IV) Weil im natürlichen Systeme

$$\partial \, (e^x) = e^x \, \partial \, x$$

so ist im natürlichen Systeme

$$\int (e^x \, \partial \, x) = e^x$$

§. 16.

In zwei verschiedenen Systemen verhalten sich die Logarithmen der nemlichen Zahl, wie die Subtangenten der Systeme.

Beweis. Es sey in einem Systeme die Subtangente $= m$, so ist

$$\delta \mathfrak{L} y = \frac{m \delta y}{y}$$

und wenn man integriret,

$$\mathfrak{L} y = \int \frac{m \delta y}{y} = m \int \frac{\delta y}{y}$$

Es sey in einem anderen Systeme die Subtangente $= \mu$, so ist

$$\delta \mathfrak{L} y = \frac{\mu \delta y}{y}$$

und wenn man integriret, so ist

$$\mathfrak{L} y = \int \frac{\mu \delta y}{y} = \mu \int \frac{\delta y}{y}$$

Es ist aber $m \int \frac{\delta y}{y}$ zu $\mu \int \frac{\delta y}{y} :: m, \mu$

das heißt, beide Logarithmen der nemlichen Zahl y verhalten sich wie m zu μ, oder wie die Subtangenten der Systeme.

Zusatz. Hieraus siehet man zugleich, daß aus einem natürlichen Logarithmus jeder andere Logarithmus der nemlichen Zahl entstehet, wenn man den natürlichen Logarithmus mit dem Modulus des anderen Systems multiplizirt. Denn im natürlichen Systeme ist

$$\delta \mathfrak{l} y = \frac{\delta y}{y}$$

folglich

$$\mathfrak{l} y = \int \frac{\delta y}{y}$$

In

und in einem anderen Systeme wo die Subtangente $= m$ ist,

$$\delta \mathfrak{L} y = \frac{m \delta y}{y},$$

folglich $\mathfrak{L} y = m \int \frac{\delta y}{y}$

folglich ist $\mathfrak{l} y$ zu $\mathfrak{L} y :: \int \frac{\delta y}{y}$ zu $m \int \frac{\delta y}{y}$

oder $\mathfrak{l} y$ zu $\mathfrak{L} y :: 1$ zu m

daher $\mathfrak{L} y = m \mathfrak{l} y$

§. 17.

Aufgabe.

Man soll den natürlichen Logarithmus einer Zahl finden.

Auflösung. Es sey die Zahl z, so ist

$$\delta \mathfrak{l} z = \frac{\delta z}{z}$$

$$\mathfrak{l} z = \int \frac{\delta z}{z}$$

Hiermit ist uns aber keines Weges geholfen, weil wir, um $\frac{\delta z}{z}$ zu integriren, den Logarithmus der Zahl z schon haben müsten.

Laßt uns aber annehmen, es sey $z = 1 + y$, so ist

$$\delta \mathfrak{l} (1 + y) = \frac{\delta (1 + y)}{1 + y},$$

Nun

Nun ist $\delta(1+y) = \delta y$, also

$$\delta l(1+y) = \frac{\delta y}{1+y} = \frac{1}{1+y}.\ \delta y$$

Dividiret man 1 durch $1+y$ (VII. H. § 12.) so kömmt

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \&c.$$

folglich

$$\frac{\delta y}{1+y} = \delta y - y\delta y + y^2\delta y - y^3\delta y + y^4\delta y - y^5\delta y + \&c.$$

oder

$$\delta l(1+y) = \delta y - y\delta y + y^2\delta y - y^3\delta y + y^4\delta y - y^5\delta y + \&c.$$

folglich, wenn man integriret, so ist

$$l(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \&c.$$

Es war aber $1+y = z$, daher $y = z-1$, folglich

$$lz = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \&c.$$

Die vorletzte Reihe ist die nemliche, welche die Quadratur der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ausdrücket. Deswegen werden die natürlichen Logarithmen, auch hyperbolische Logarithmen genannt (XI. H. § 4. Ex. II.)

Zusatz. Wenn man in der gefundenen Formel, welche $l(1+y)$ ausdrücket, y negativ annimmt und allenthalben $-y$ anstatt $+y$ setzet, so kömmt

$$l(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \&c.$$

Man

Man subtrahire $l(1-y)$ von $l(1+y)$, nemlich

von $l(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \&c.$

subtr. $l(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - \&c.$

so bleibet

$$l(1+y) - l(1-y) = 2y \ldots + \frac{2y^3}{3} \ldots + \frac{2y^5}{5} + \&c.$$

Es ist aber $l(1+y) - l(1-y) = l\frac{1+y}{1-y}$, also wird

$$l\frac{1+y}{1-y} = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \&c.\right)$$

Es werde nun der natürliche Logarithmus einer Zahl n verlanget, so nehme man an

$$n = \frac{1+y}{1-y}$$

daher

$$n - ny = 1 + y$$

$$n - 1 = ny + y$$

$$n - 1 = (n+1)y$$

$$\frac{n-1}{n+1} = y$$

Man setze also in die letzte Formel n anstatt $\frac{1+y}{1-y}$ und $\frac{n-1}{n+1}$ anstatt y, so kömmt

$$ln = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \&c.\right]$$

Weil

Weil diese Reihe allemal ziemlich geschwinde abnimmt, so ist sie im Gebrauche sehr bequem. Gesetzt es solle der natürliche Logarithmus von 10 gefunden werden, so ist

$$l\,10 = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{7.11^7} + \&c.\right)$$

Wenn man alle Sätze in Dezimalbrüchen ausdrücket, so findet man

$$l\,10 = 2{;}3025850\ldots.$$

§. 18.

Aufgabe.

Den Logarithmus einer Zahl in jedem Systeme finden.

Auflösung. Es sey der natürliche Logarithmus einer Zahl n gegeben, und in einem anderen Systeme sey die Subtangente oder der Modulus $= m$, so ist (§. 16)

$$\mathfrak{L}\,n = m\,l\,n$$

und

$$\frac{\mathfrak{L}\,n}{l\,n} = m$$

Wenn man also den Logarithmus irgend einer Zahl n im natürlichen Systeme und auch im anderen Systeme kennet, so findet man die Subtangente m. Es ist am bequemsten, wenn man anstatt n, die Grundzahl des anderen Systemes nimmt; alsdann ist allemal $\mathfrak{L}\,n = 1$. Denn weil $n^1 = n$, so ist $\mathfrak{L}\,n = 1$. Folglich bekömmt man

$$\frac{1}{l\,n} = m$$

und hier läßt sich $l\,n$ aus voriger Aufgabe finden. Hat man nun die Subtangente m des anderen Systemes gefun-

finden, so darf man nur die natürlichen Logarithmen mit m multipliziren, um die Logarithmen der nemlichen Zahlen im anderen Systeme zu finden. Denn $\mathfrak{L} n = m \, l n$.

Exempel. In den gewöhnlichen Logarithmentafeln ist die Grundzahl $= 10$, und folglich $\mathfrak{L} 10 = 1$. Der natürliche Logarithmus von 10 ist gefunden worden 2;3025850 . . . . (§. 17.) Setzet man diese Werthe in die Formel $m = \frac{\mathfrak{L} n}{l n}$

so wird $$m = \frac{1}{2;3025850 \ldots}$$

oder $$m = 0;4342944 \ldots$$

Dieses ist demnach der Modulus oder die Subtangente des Briggischen Systemes; und mit diesem Modulus muß jeder natürliche Logarithmus multipliziret werden, wenn man den Tafel-Logarithmus der nemlichen Zahl erhalten will.

Es werde verlanget der Tafel-Logarithmus der Zahl 17, so ist (§. 17.)

$$l 17 = 2\left(\frac{16}{13} + \frac{16^3}{3 \cdot 18^3} + \frac{16^5}{5 \cdot 18^5} + \frac{16^7}{7 \cdot 18^7} + \&c.\right)$$

oder, weil $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ und $\frac{16^n}{18^n} = \left(\frac{16}{18}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{8^n}{9^n}$

so ist

$$l 17 = 2\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3 \cdot 9^3} + \frac{8^5}{5 \cdot 9^5} + \frac{8^7}{7 \cdot 9^7} + \&c.\right)$$

Multipliziret man nun die Reihe mit dem Modulus 0;4342944 . . . ., so erhält man

$$\mathfrak{L}\,17 = 2 \times 0{;}4342944\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3\cdot 9^3} + \frac{8^5}{5\cdot 9^5} + \&c.\right)$$

$$\text{oder}\quad \mathfrak{L}\,17 = 0{;}8685888\ldots\left(\frac{8}{9} + \frac{8^3}{3\cdot 9^3} + \frac{8^5}{5\cdot 9^5} + \&c.\right)$$

Entwickelt man alles in Dezimal-Brüchen, so wird

$$\mathfrak{L}\,17 = 1{;}2304489\ldots.$$

§. 19.

Aufgabe.

In jedem Systeme die Proporzional-Zahl finden, die zu einem Logarithmus gehöret.

Vorbereitung. Es sey m der Modulus eines Systemes, und in diesem Systeme sey

$$u = \mathfrak{L}\,(1 + v)$$

so ist, vermöge des vorigen und des 17ten Paragraphs,

$$u \text{ oder } \mathfrak{L}(1+v) = m\left(v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} + \&c.\right)$$

folglich

$$\frac{u}{m} = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \&c.$$

Man nehme nun an, es sey

$$v = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + \&c.$$

und verwandele z in eine Funkzion von u, wie am gehörigen Orte (VII. H. §. 20.) gelehret worden, so wird man bekommen.

$$v = \frac{u}{m} + \frac{u^2}{2m^2} + \frac{u^3}{6m^3} + \frac{u^4}{24m^4} + \frac{u^5}{120m^5} + \&c.$$

oder

$$v = \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1,2.3.m^3} + \frac{u4}{1.2.3.4\,m^4} + \&c.$$

folglich

$$1 + v = 1 + \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3.m^3} + \&c.$$

Weil nun $u = \mathfrak{L}(1+v)$, so ist $1+v$ die Zahl deren Logarithmus u ist.

Auflösung.

Laßt uns die Proporzional-Zahl, die zum Logarithmus u gehöret, durch $\mathfrak{N}\mathfrak{L}u$ ausdrücken, (§ 6.) so wird

$$\mathfrak{N}\mathfrak{L}u = 1 + \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3.m^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.m^4} + \&c.$$

Im natürlichen Systeme ist $m = 1$. Wenn wir also die Zahl, deren natürlicher Logarithmus u ist, durch $\mathfrak{nl}u$ ausdrücken, so wird

$$\mathfrak{nl}u = 1 + u + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3.} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \&c.$$

Zusatz I. Weil die Sätze in der gefundenen Reihe zunehmend sind, so scheinet die Reihe von geringem Nutzen zu seyn. Jedoch dienet sie, um die Basis des natürlichen Systems zu finden. Denn in jedem Systeme ist die Basis diejenige Proporzional-Zahl deren Logarithmus 1 ist. Setzet man demnach 1 anstatt u in der lezten Formel, so wird

$$\mathfrak{nl}\,1 = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3.} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$$

Berechnet man diese Reihe in Dezimal-Brüchen, und bezeichnet die Basis des natürlichen Systems mit e, so entstehet $e = 2;\ 7182818\ldots\ldots$

und dieses ist also der Werth von e, der vorher noch unbekannt war (§. 14 Zus. I.)

Zusatz II. Die nemliche Reihe, welche in der Auflösung angegeben worden, kann auch dienen, um Exponenzial-Grösßen durch unendliche Reihen auszudrücken.

Es sey gegeben e^x, so ist dieses die Zahl, welche im natürlichen Systeme zum Logarithmus x gehöret, oder $e^x = \text{n}lx$. Es ist aber vermöge der gefundenen Formel

$$\text{n}lx = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

Gesetzet ferner, es solle a^x durch eine unendliche Reihe ausgedrücket werden, so setze man

$$a^x = e^x$$

nun wird, wenn man beide Glieder der Gleichung auf ein und dasselbe System beziehet, welches es auch seyn mag,

$$z\,\text{L}\,a = x\,\text{L}e$$

oder, wenn man das natürliche System gebrauchet,

$$z\,la = x\,le$$

Nun ist im natürlichen Systeme $le = 1$, also ist in diesem Systeme

$$z\,la = x$$

folglich wird

$$a^x = e^x = e^{z\,la}$$

Es ist aber

$$e^{z\,la} = 1 + \frac{z\,la}{1} + \frac{z^2(la)^2}{1.2} + \frac{z^3(la)^3}{1.2.3} + \text{&c.}$$

folglich auch

$$a^x = 1 + z\,la + \frac{z^2(la)^2}{1.2} + \frac{z^3(la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4(la)^4}{1.2.3.4.} + \text{&c.}$$

wo

wo unter l a allemal der natürliche Logarithmus von a verstanden wird.

Anmerkung. Wir haben gesehen, wie die logarithmische Linie ein bequemes Hülfsmittel verschaffet hat, um die Logarithmen und exponenzialen Größen zu berechnen. Diese Linie kann nun auch, gleich andern krummen Linien behandelt werden, und die in vorigen Hauptstücken angeführten Aufgaben können alle auf dieselbe angewandt werden. Was die Subtangente betrift, so haben wir schon gesehen, daß sie hier eine beständige Größe ist, welche man als bekannt annehmen muß, und woraus sich ferner die Grundzahl des Systems berechnen läßt. Wir wollen demnach weiter gehen.

§. 20.

Aufgabe.

Die Tangente, die Subnormal-Linie und die Normal-Linie einer logarithmischen Linie finden.

Auflösung.

I) Für die Tangente ist die allgemeine Formel (VIII. H. §. 2.)

$$y \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$$

In der logarithmischen Linie, ist aber, wenn die Subtangente $= m$ (§. 13 und 14)

$$y \frac{dx}{dy} = m$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{m}{y}$$

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{m^2}{y^2}$$

Daher ist die Tangente

$$y \sqrt{\left(1 + \frac{m^2}{y^2}\right)}$$

oder $$y \sqrt{\left(\frac{m^2 + y^2}{y^2}\right)}$$

oder $$\sqrt{(m^2 + y^2)}$$

und im natürlichen Systeme ist die Subtangente $= \sqrt{(1 + y^2)}$. Dieses ist natürlich, weil das Quadrat der Tangente allemal der Summe des Quadrates der Subtangente und des Quadrates der Applikate gleich ist.

II) Es ist (VIII. H. §. 2) die Subnormal-Linie

$$= y \frac{dy}{dx}$$

Weil nun in der logarithmischen Linie

$$\frac{dx}{dy} = \frac{m}{y}$$

so ist $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{m}$$

und $$y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{m}$$

Im natürlichen Systeme ist die Subnormal-Linie $= y^2$.

III) Es ist (VIII. H. §. 2.) die Normal-Linie $= y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$

Nun ist in der logarithmischen Linie $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{m^2}$, folglich ist

die

die Normal : Linie $= y\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{m^2}\right)}$

$$= y\sqrt{\left(\frac{m^2+y^2}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{y}{m}\sqrt{(m^2+y^2)}$$

und im natürlichen Systeme ist sie $= y\sqrt{(1+y^2)}$

§. 21.

Aufgabe.

Den Halbmesser der Krümmung der logarithmischen Linie finden.

Auflösung.

Wenn der Halbmesser der Krümmung r genannt wird, so ist (IX. H. §7.)

$$r = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

eine Formel, worinn dx als beständig betrachtet wird. Nun ist in der logarithmischen Linie

$$m\,dy = y\,dx$$

ferner wenn dx beständig ist

$$m\,d^2y = dx\,dy$$

Es ist aber $dy = \frac{ydx}{m}$, folglich $dx\,dy = \frac{ydx^2}{m}$

also

$$m\,d^2y = \frac{ydx^2}{m}$$

$$m^2d^2y = ydx^2$$

daher $\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{m^2}{y}$

$$-\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{m^2}{y}$$

und da ferner $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{m^2}$, so wird

$$r = -\frac{m^2}{y}\left(1+\frac{y^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{m^2}{y}\left(\frac{m^2+y^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{m^2}{y}\cdot\frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{m^2}{y}\cdot\frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{m^3}$$

$$= -\frac{(m^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{my}$$

Das negative Zeichen giebt zu erkennen, daß die logarithmische Linie gegen ihre Direktrize konvex ist, welches auch sogleich an ihrer Gestalt bemerket wird.

§. 22.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie rektifiziren.

Auflösung. Die Länge einer krummen Linie zu finden, muß

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

integri-

integriret werden. (XI. H. § 2.) Nun ist bei der logarithmischen Linie $dx = \frac{m dy}{y}$ folglich $dx^2 = \frac{m^2 dy^2}{y^2}$, also bekömmt man zu integriren

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 dy^2}{y^2} + dy^2\right)}$$

oder $$dy \sqrt{\left(\frac{m^2}{y^2} + 1\right)}$$

oder $$dy \sqrt{\left(\frac{m^2 + y^2}{y^2}\right)}$$

oder $$\frac{dy \sqrt{(m^2 + y^2)}}{y}$$

Wer da will, der mag versuchen, diese Formel in eine unendliche Reihe zu verwandeln, und sie dann zu integriren. Es kömmt aber nichts merkwürdiges heraus.

§. 23.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie quadriren.

Auflösung. Um die Fläche einer krummen Linie zu finden, muß diese Formel

$$y\, d\, x$$

integriret werden (XI. H. § 4.). In der logarithmischen Linie aber ist $y_1 dx = m dy$, und hiervon ist das Integral $my + C$.

Will man den Raum vom Anfange des Systems an rechnen, wo $y = 1$ und $x = o$, so muß das Integral gleich o werden, wenn $y = 1$, dann bekömmt man

$$1.m + C = o$$

$$C = -m$$

In diesem Falle ist also die Fläche

$$my - m = (y - 1)m$$

Will man den Raum von der unendlichen Entfernung an rechnen, wo man y für o halten kann, so wird $C = o$, und der ganze Raum wird my, das ist, er nähert sich ohne Ende dem Rektangel aus der Applikate y und der Subtangente m.

§. 24.

Aufgabe.

Man soll die runde Fläche berechnen, welche entstehet, wenn eine logarithmische Linie sich um ihre Direktrisse herum drehet.

Auflösung. Es muß diese Formel integriret werden

$$2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

wo π dem Umkreis des Zirkels vorstellet, wenn der Durchmesser $= 1$, oder $\pi = 3;1459\ldots\ldots$ (XI. H. §. 6.)

Nun ist in der logarithmischen Linie gefunden worden (§. 22.)

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy\sqrt{(m^2 + y^2)}}{y}$$

folglich

$$2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi dy \sqrt{(m^2 + y^2)}$$

Diese

Diese lezte Formel kann man, wenn man will, durch eine unendliche Reihe integriren.

§. 25.

Aufgabe.

Die logarithmische Linie kubiren.

Auflösung. Die Formel, welche integriret werden muß ist (XI. H. §. 8.)

$$\pi y^2 \, dx$$

wo π die Peripherie des Zirkels für den Durchmesser 1 anzeiget.

In der logarithmischen Linie ist aber

$$dx = \frac{m\,dy}{y}$$

also $\pi y^2 \, dx = \pi m y \, dy$

Hiervon ist das Integral

$$\tfrac{1}{2} \pi m y^2 + C$$

Soll der Körper von einer unendlichen Entfernung an gerechnet werden, wo $y = o$, so wird $C = o$, und der Körper ist bloß $= \frac{\pi}{2} m y^2$. Soll der Körper von der Stelle an gerechnet werden, wo $x = o$, und folglich $y = 1$, so bekömmt man

$$\tfrac{1}{2} \pi m + C = o$$

$$C = -\tfrac{1}{2} \pi m$$

folglich wird der Körper

$$\tfrac{1}{2} \pi m y^2 - \tfrac{1}{2} \pi m$$

oder $\tfrac{1}{2} \pi m (y^2 - 1)$

Im ersten Falle drücket $\frac{1}{2} \pi m y^2$ ebenfalls einen Zylinder aus, der y zum Durchmesser und $2m$ zur Höhe hat. Denn solcher Zylinder ist $= \frac{1}{4} \pi y^2 . (2m) . = \frac{1}{2} \pi m y^2$.

Vierzehntes Hauptstück.

Von den Differenzialen und Integralen der Zirkelgrößen.

§. 1.

Ausser den Logarithmen und Exponenzial-Größen, giebt es noch andere transzendente Größen, wohin hauptsächlich die Zirkelgrößen, oder die trigonometrischen Linien gehören. Diese sind zwar schon zum Theile aus der gemeinen Trigonometrie bekannt; jedoch müssen wir sie an diesem Orte vornehmen, um zu lehren, wie sie in der Differenzial- und Integral-Rechnung behandelt werden. Dieses ist um desto nöthiger, da solche Größen manchmal in den Gleichungen der krummen Linien angetroffen werden.

§. 2.

Aufgabe.

Die Differenzial-Verhältnisse der Zirkelgrößen oder trigonometrischen Linien finden.

Auflösung. Wir wollen hier wiederum, wie schon im XII. Hauptst. §. 1. erinnert worden, den Sinus eines Bogens z durch Sz, den Sinus-Versus durch Vz, die Tangente durch Tz, die Sekante durch βz ausdrücken. Der Kosinus, der Kosinus-Versus, die Kotangente, und Kosekanten sollen durch $S'z$, $V'z$, $T'z$, $\beta'z$ angedeutet wer-

werden. Der Buchstabe A soll einen Bogen anzeigen, z. E. Aß'z ist der Bogen, der z zur Kosekante hat.

Dieses vorausgesetzet, so sind die Differenzial-Verhältnisse der Zirkelgrößen in folgender Tafel enthalten.

$$I)\ \delta Sz = \delta z \cdot S'z$$

$$II)\ \delta S'z = -\delta z Sz$$

$$III)\ \delta Tz = \frac{\delta z}{S'z^2}$$

$$IV)\ \delta T'z = \frac{-\delta z}{Sz^2}$$

$$V)\ \delta ßz = \frac{\delta z \cdot Sz}{S'z^2} = \frac{\delta z \cdot Tz}{S'z}$$

$$VI)\ \delta ß'z = \frac{-\delta z \cdot S'z}{Sz^2} = \frac{-\delta z \cdot T'z}{Sz}$$

$$VII)\ \delta Vz = \delta z \cdot Sz$$

$$VIII)\ \delta V'z = -\delta z S'z$$

$$IX)\ \delta ASz = \frac{\delta z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$X)\ \delta AS'z = \frac{-\delta z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

$$XI)\ \delta ATz = \frac{\delta z}{1+z^2}$$

$$XII)\ \delta AT'z = \frac{-\delta z}{1+z^2}$$

$$XIII)\ \delta Aßz = \frac{\delta z}{z\sqrt{(z^2-1)}}$$

$$XIV)\ \delta Aß'z = \frac{-\delta z}{z\sqrt{(z^2-1)}}$$

$$XV)\ \delta AVz = \frac{\delta z}{\sqrt{(2z-z^2)}}$$

$$XVI)\ \delta AV'z = \frac{-\delta z}{\sqrt{(2z-z^2)}}$$

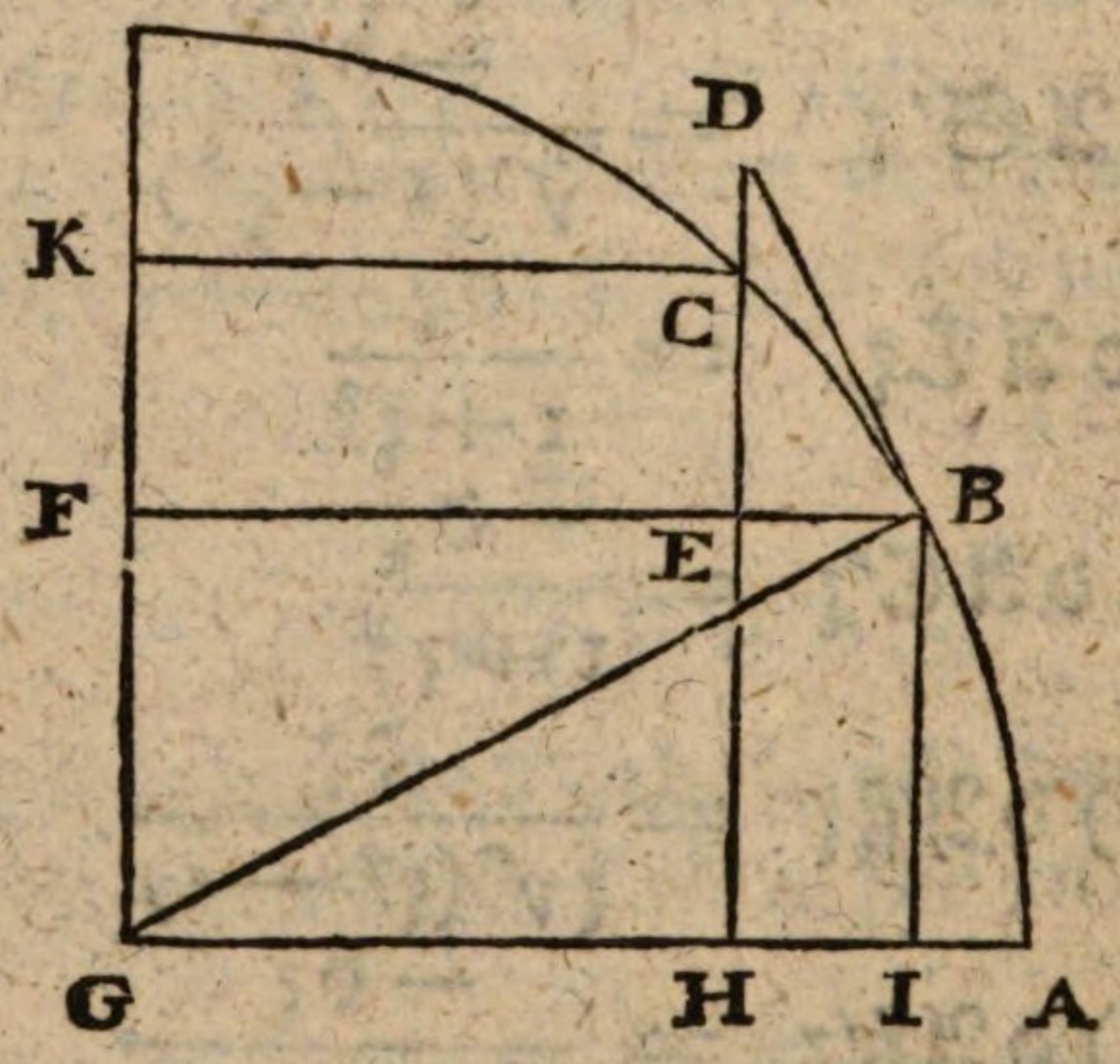
Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzet, daß der Halbmesser des Zirkels oder der Sinus-Totus = 1 sey.

Beweis der Formeln.

Wir könnten zwar den Leser auf unseren selbstlernenden Geometer zurückweisen, wo alle vorige Formeln im zweiten Theile von der 196sten bis zur 205ten Seite bewiesen sind. Um aber dem Leser das Nachsuchen, und vielleicht gar den Ankauf jenes Werkes zu ersparen, so wollen wir die Beweise hier kürzlich wiederholen, und dieselben noch bequemer einrichten.

I.

Es sey A B = z ein beliebiger Zirkelbogen. Dieser nehme zu um B C. Der Sinus von A B ist B I. Der Sinus von A B C ist C H. Der Unterschied ist C E.



Ziehe den Halbmesser G B, und B D senkrecht auf demselben. Verlängere H C nach D, so daß H D und B D einander schneiden in D.

So

So sind beide Dreiecke GBF und BDE ähnlich, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht stehen.

Es ist demnach

$$GB, BF :: BD, DE.$$

Nun ist GB der Halbmesser (= 1), BF ist der Kosinus des Bogens AB (= z). Folglich ist

$$1, Sz :: BD, DE$$

Je kleiner nun der Unterschied BC angenommen wird, desto mehr nähert sich BD der BC, und DE der CE. Setzet man demnach in vorige Proporzion die Gränzen der veränderlichen Größen BD und DE, das ist, δz und δSz,

so hat man $1, Sz :: \delta z, \delta Sz$

daher ist $\delta Sz = \delta z S'z$

II.

Es sey *u* das Komplement des Bogens z, so ist aus dem nemlichen Grunde

$$\delta S u = \delta u S' u$$

Nun ist $Su = S'z$, und $S'u = Sz$, ferner ist $\delta u = -\delta z$, weil nemlich das Komplement um eben so viel abnimmt als der ursprüngliche Bogen zunimmt. Setzet man diese Werthe in die vorige Formel, so ist

$$\delta S' z = -\delta z S z.$$

III.

Es ist aus der Trigonometrie bekannt, daß

$$S'z, Sz :: 1, Tz$$

daher

daher $$\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{S}z}{\mathfrak{S}'z}$$

Wenn man differenziret, so kömmt

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{S}'z.\mathfrak{d}\mathfrak{S}z - \mathfrak{S}z.\mathfrak{d}\mathfrak{S}'z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

Setzet man $\mathfrak{d}z\,\mathfrak{S}'z$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}z$, und $-\mathfrak{d}z\,\mathfrak{S}z$ anstatt $\mathfrak{d}\mathfrak{S}'z$, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{d}z\mathfrak{S}'z^2 + \mathfrak{d}z\mathfrak{S}z^2}{\mathfrak{S}'z^2} = \frac{(\mathfrak{S}'z^2 + \mathfrak{S}z^2)\mathfrak{d}z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

Nun ist aber, vermöge der Trigonometrie, $\mathfrak{S}'z^2 + \mathfrak{S}z^2$ gleich dem Quadrate des Halbmessers, also $\mathfrak{S}'z^2 + \mathfrak{S}z^2 = 1$, folglich wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

IV.

Es sey u das Komplement des Bogens z, so ist, vermöge der vorigen Formel,

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{T}\,u = \frac{\mathfrak{d}\,u}{\mathfrak{S}'u^2}$$

Nun ist $\mathfrak{T}u = \mathfrak{T}'z$, $\mathfrak{S}'u = \mathfrak{S}z$, und $\mathfrak{d}u = -\mathfrak{d}z$ wie bei den Kosinus. Substituiret man, so wird

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}'z = \frac{-\mathfrak{d}z}{\mathfrak{S}z^2}$$

V.

Die Trigonometrie lehret, daß

$\mathfrak{S}'z, 1 :: 1, \beta z$

oder

oder $$\beta z = \frac{1}{S'z}$$

folglich ist $$d\beta z = \frac{-dS'z}{S'z^2}$$

Man setze $-d_z S_z$ anstatt $dS'z$, so wird

$$d\beta z = \frac{+d_z S_z}{S'z^2} = \frac{d_z}{S'z} \cdot \frac{S_z}{S'z}$$

Es ist aber, wie bei dem Beweise der dritten Formel angeführet worden, $\frac{S_z}{S'z} = T_z$, also ist auch

$$d\beta z = \frac{d_z T_z}{S'z}$$

VI.

Es sey u das Komplement des Bogens z, so ist, vermöge der vorigen Formel,

$$d\beta u = \frac{du \cdot Su}{S'u^2}$$

Nun ist $\beta u = \beta' z$, $Su = S'z$, $S'u = S_z$, $du = -dz$, folglich $$d\beta' z = \frac{-d_z S'z}{S_z^2}$$

Es ist auch $$d\beta u = \frac{du \cdot Tu}{S'u}$$

Setzet man auch hier $\beta' z$ anstatt βu, $T'z$ anstatt Tu, S_z anstatt $S'u$, $-dz$ anstatt du, so ist

$$d\beta' z = \frac{-d_z T'z}{S_z}$$

VII.

Es ist, vermöge der Trigonometrie,

$$\mathfrak{V} z = 1 - \mathfrak{S}' z$$

folglich $$\mathfrak{d}\,\mathfrak{V} z = -\mathfrak{d}\,\mathfrak{S}' z$$

Nun ist $$\mathfrak{d}\,\mathfrak{S}' z = -\mathfrak{d} z . \mathfrak{S} z$$

also $$\mathfrak{d}\,\mathfrak{V} z = +\mathfrak{d} z\, \mathfrak{S} z$$

VIII.

Es sey wiederum u das Komplement des Bogens z, so ist, vermöge der vorigen Formel,

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{V} u = \mathfrak{d} u \mathfrak{S} u$$

Nun ist $\mathfrak{V} u = \mathfrak{V}' z$, $\mathfrak{S} u = \mathfrak{S}' z$, $\mathfrak{d} u = -\mathfrak{d} z$,

folglich $$\mathfrak{d}\,\mathfrak{V}' z = -\mathfrak{d} z . \mathfrak{S}' z$$

IX.

Es ist, vermöge der ersten Formel,

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{S} z = \mathfrak{d} z . \mathfrak{S}' z$$

daher $$\mathfrak{d} z = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{S} z}{\mathfrak{S}' z}$$

Es sey $\mathfrak{S} z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\,\mathfrak{S} u$, es ist auch $\mathfrak{S}' z = \sqrt{(1 - \mathfrak{S} z^2)} = \sqrt{(1 - u^2)}$. Deswegen wird

$$\mathfrak{d}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{S} u = \frac{\mathfrak{d} u}{\sqrt{(1 - u^2)}}$$

In den Formeln haben wir den Sinus mit z, wie vorher den Bogen bezeichnet, welches willkürlich ist.

X.

X.

Wenn der Bogen, welcher u zum Sinus hat, zunimmt, so nimmt das Komplement oder der Bogen, welcher u zum Kosinus hat, um eben so viel ab. Das Differenzial dieses Bogens ist also dem Differenziale jenes Bogens gleich, nur daß es negativ wird. Folglich ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{S}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

XI.

Aus der dritten Formel ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{T}z = \frac{\mathfrak{d}z}{\mathfrak{S}'z^2}$$

daher $\mathfrak{d}z = \mathfrak{S}'z^2 \cdot \mathfrak{d}\mathfrak{T}z$

Es ist aber aus der Trigonometrie bekannt, daß

$$\mathfrak{B}z,\ 1 :: 1,\ \mathfrak{S}'z$$

oder weil $\mathfrak{B}z = \sqrt{(1+\mathfrak{T}z^2)}$

$$\sqrt{(1+\mathfrak{T}z^2)},\ 1 :: 1,\ \mathfrak{S}'z$$

daher $\mathfrak{S}'z = \frac{1}{\sqrt{(1+\mathfrak{T}z^2)}}$

folglich ist $\mathfrak{S}'z^2 = \frac{1}{1+\mathfrak{T}z^2}$

Also wird

$$\mathfrak{d}z\,(=\mathfrak{S}'z^2 \cdot \mathfrak{d}\mathfrak{T}z) = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{T}z}{1+\mathfrak{T}z^2}$$

Es sey $\mathfrak{T}z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\mathfrak{T}u$, folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}u = \frac{\mathfrak{d}u}{1+u^2}$$

XII.

Wenn der Bogen, welcher u zur Tangente hat, zunimmt, so nimmt das Komplement, welches u zur Kotangente hat, um eben so viel ab. Also ist

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{T}'u = \frac{-\mathfrak{d}u}{1+u^2}$$

XIII.

Es ist, vermöge der fünften Formel,

$$\mathfrak{d}\mathfrak{B}z = \frac{\mathfrak{d}z.\mathfrak{T}z}{\mathfrak{S}'z}$$

daher

$$\mathfrak{d}z = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{B}z.\ \mathfrak{S}'z}{\mathfrak{T}z}$$

Es ist aber, vermöge der Trigonometrie,

$$\mathfrak{B}z,\ 1 :: 1\ \mathfrak{S}'z \left(= \frac{1}{\mathfrak{B}z}\right)$$

Ferner ist auch

$$\mathfrak{T}z = \sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}$$

Also wird

$$\mathfrak{d}z \left(= \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{B}z.\ \mathfrak{S}'z}{\mathfrak{T}z}\right) = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{B}z}{\mathfrak{B}z\sqrt{(\mathfrak{B}z^2 - 1)}}$$

Es sey $\mathfrak{B}z = u$, so wird $z = \mathfrak{A}\mathfrak{B}u$, und folglich

$$\mathfrak{d}\mathfrak{A}\mathfrak{B}u = \frac{\mathfrak{d}u}{u\sqrt{(u^2 - 1)}}$$

XIV.

XIV.

Wenn der Bogen, der u zur Sekante hat, zunimmt, so nimmt sein Komplement um eben so viel ab, folglich wird

$$\delta \mathfrak{A}\mathfrak{C}' u = \frac{-\delta u}{u\sqrt{(u^2 - 1)}}$$

XV.

Es ist aus der siebenten Formel

$$\delta \mathfrak{V} z = \delta z \mathfrak{S} z$$

$$\text{folglich } \delta z = \frac{\delta \mathfrak{V} z}{\mathfrak{S} z}$$

Nun ist vermöge der Trigonometrie

$$\mathfrak{V} z, \mathfrak{S} z :: \mathfrak{S} z, (2 - \mathfrak{V} z)$$

$$\text{daher } \mathfrak{S} z^2 = \mathfrak{V} z (2 - \mathfrak{V} z)$$

$$\text{oder } \mathfrak{S} z^2 = 2\mathfrak{V} z - \mathfrak{V} z^2$$

$$\text{und } \mathfrak{S} z = \sqrt{(2\mathfrak{V} z - \mathfrak{V} z^2)}$$

folglich wird

$$\delta z \left(= \frac{\delta \mathfrak{V} z}{\mathfrak{S} z} \right) = \frac{\delta \mathfrak{V} z}{\sqrt{(2\mathfrak{V} z - \mathfrak{V} z^2)}}$$

Es sey $\mathfrak{V} z = u$, so ist $z = \mathfrak{A}\mathfrak{V} u$, folglich

$$\delta \mathfrak{A}\mathfrak{V} u = \frac{\delta u}{\sqrt{(2u - u^2)}}$$

XVI.

Wenn der Bogen, welcher u zum Sinusversus hat, zunimmt, so nimmt dessen Komplement um eben so viel ab. Folglich ist

$$\delta \mathfrak{A}\mathfrak{V}' u = \frac{-\delta u}{\sqrt{(2u - u^2}}$$

§. 3.

Aufgabe.

Differenzial-Funkzionen durch Zirkelgrößen integriren, wenn es angehet.

Auflösung. Man kehre alle die Differenzial-Formeln um, welche im Anfange des vorigen Paragraphs gegeben worden, so bekömmt man eben so viel Integral-Formeln.

Differenzial.	Integral.
I) $\delta z\, \mathfrak{S}' z$	$\mathfrak{S} z + C$
II) $\delta z\, \mathfrak{S} z$	$-\mathfrak{S}' z + C$
III) $\frac{\delta z}{\mathfrak{S}' z^2}$	$\mathfrak{T} z + C$
IV) $\frac{\delta z}{\mathfrak{S} z^2}$	$-\mathfrak{T}' z + C$
V) $\frac{\delta z . \mathfrak{S} z}{\mathfrak{S}' z^2}$, oder $\frac{\delta z . \mathfrak{T} z}{\mathfrak{S}' z}$ . .	$\mathfrak{Z} z + C$
VI) $\frac{\delta z . \mathfrak{S}' z}{\mathfrak{S} z^2}$, oder $\frac{\delta z . \mathfrak{T}' z}{\mathfrak{S} z}$ . .	$-\mathfrak{Z}' z + C$
VII) $\delta z . \mathfrak{S} z$	$\mathfrak{V} z + C$
VIII) $\delta z . \mathfrak{S}' z$ . . .	$-\mathfrak{V}' z + C$
IX) $\frac{\delta z}{\sqrt{(1 - z^2)}}$ . .	$\mathfrak{A}\mathfrak{S} z + C$, oder $-\mathfrak{A}\mathfrak{S}' z + C$
X) $\frac{\delta z}{1 + z^2}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{T} z + C$, $-\mathfrak{A}\mathfrak{T}' z + C$
XI) $\frac{\delta z}{z\sqrt{(z^2 - 1)}}$.	$\mathfrak{A}\mathfrak{Z} z + C$, oder $-\mathfrak{A}\mathfrak{Z}' z + C$
XII) $\frac{\delta z}{\sqrt{(2z - z^2)}}$.	$\mathfrak{A}\mathfrak{V} z + C$, oder $-\mathfrak{A}\mathfrak{V}' z + C$

Die

Die vier letzten Formeln können auch gebraucht werden, wenn anstatt der Einheit, eine andere Größe im Differenzial vorhanden ist.

Es sey gegeben $\frac{\partial z}{\sqrt{(a^2 - z^2)}}$

Dividire Zähler und Nenner durch a, so kömmt

$$\frac{\frac{1}{a}\partial z}{\frac{1}{a}\sqrt{(a^2 - z^2)}} \text{ oder } \frac{\partial\left(\frac{z}{a}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)}} \text{ oder } \frac{\partial\left(\frac{z}{a}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right]}}$$

Das Integral des letzten Differenzials ist, vermöge der IXten Formel,

$$\mathfrak{AS}\frac{z}{a} + C \text{ oder } -\mathfrak{AS}'\frac{z}{a} + C$$

Es sey gegeben $\frac{\partial z}{a^2 + z^2}$

Dividire Zähler und Nenner durch a^2, so kömmt

$$\frac{\frac{1}{a^2}\partial z}{1 + \frac{z^2}{a^2}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{a}\partial\left(\frac{z}{a}\right)}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}$$

Hiervon aber ist das Integral, vermöge der Xten Formel,

$$\frac{1}{a}\mathfrak{AT}\frac{z}{a} + C \text{ oder } -\frac{1}{a}\mathfrak{AT}'\frac{z}{a} + C$$

Es sey gegeben $\frac{\partial z}{z\sqrt{(z^2 - a^2)}}$

Dividire Zähler und Nenner durch a^2, so kömmt

$$\frac{\frac{1}{a^2}\partial z}{\frac{1}{a^2}z\cdot\sqrt{(z^2-a^2)}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{a}\partial\left(\frac{z}{a}\right)}{\frac{z}{a}\cdot\sqrt{\left(\frac{z^2}{a^2}-1\right)}}$$

und hiervon ist das Integral, nach der XIten Formel,

$$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\beta\frac{z}{a}+C \text{ oder } -\frac{1}{a}\mathfrak{A}\beta'\frac{z}{a}+C$$

Es sey gegeben

$$\frac{\partial z}{\sqrt{(az-z^2)}}, \text{ das ist } \frac{\partial z}{\sqrt{(2.\frac{1}{2}az-z^2)}}$$

Dividire Zähler und Nenner durch $\frac{1}{2}a$, so wird der Zähler

$$\frac{\partial z}{\frac{1}{2}a}=\frac{2\partial z}{a}=\partial\left(\frac{2z}{a}\right)$$

Der Nenner wird $\frac{\sqrt{(2.\frac{1}{2}az-z^2)}}{\frac{1}{2}a}$

oder $\frac{\sqrt{(2.\frac{1}{2}az-z^2)}}{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2)}}$

oder $\sqrt{\frac{2.\frac{1}{2}az-z^2}{\frac{1}{4}a^2}}$

oder $\sqrt{\left(\frac{4az-4z^2}{a^2}\right)}$

oder $\sqrt{\left(\frac{4az}{a^2}-\frac{4z^2}{a^2}\right)}$

oder

oder $\sqrt{\left(\frac{4z}{a}-\frac{4z^2}{a^2}\right)}$

oder $\sqrt{\left[2.\frac{2z}{a}-\left(\frac{2z}{a}\right)^2\right]}$

Setzet man nun Zähler und Nenner am gehörigen Platze, so wird das Differenzial

$$\frac{\partial\left(\frac{2z}{a}\right)}{\sqrt{\left[2.\frac{2z}{a}-\left(\frac{2z}{a}\right)^2\right]}}$$

und hiervon ist das Integral, nach der XIIten Formel,

$$\mathfrak{AV}\frac{2z}{a}+C, \text{ oder } -\mathfrak{AV}'\frac{2z}{a}+C.$$

Zu den obigen zwölf Formeln können demnach noch diese 4 hinzugethan werden.

	Differenziale.	Integrale.
XIII)	$\frac{\partial z}{\sqrt{(a^2-z^2)}}$	$\mathfrak{AS}\frac{z}{a}+C$ oder $-\mathfrak{AS}'\frac{z}{a}+C$
XIV)	$\frac{\partial z}{a^2+z^2}$	$\frac{1}{a}\mathfrak{AT}\frac{z}{a}$ oder $+C, -\frac{1}{a}\mathfrak{AT}'\frac{z}{a}+C$
XV)	$\frac{\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$	$\frac{1}{a}\mathfrak{A}\beta\frac{z}{a}+C$ oder $-\frac{1}{a}\mathfrak{A}\beta'\frac{z}{a}+C$
XVI)	$\frac{\partial x}{\sqrt{(az-z^2)}}$	$\mathfrak{AV}\frac{2z}{a}+C$ oder $-\mathfrak{AV}'\frac{2z}{a}+C$

§. 4.

Aufgabe.

Man soll den Zirkelbogen in einer unendlichen Funkzion des Sinus, oder des Kosinus, oder der Tangente, ꝛc. ausdrücken.

Auflösung.

I) Es ist (§. 2.)

$$\partial \mathfrak{AS} z = \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

also $$\mathfrak{AS} z = \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

oder $$\mathfrak{AS} z = \int \partial z (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Man entwickele $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ in eine unendliche Reihe, vermöge der Newtonischen Regel (VII. H. § 13) und multiplizire solche Reihe mit ∂z, so kömmt

$$\partial z + \frac{z^2 \partial z}{2} + \frac{3 \cdot z^4 \partial z}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot z^6 \partial z}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z^8 \partial z}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{&c.}$$

Man integrire, so kömmt

$$\mathfrak{AS} z = z + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot z^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \text{&c.}$$

Weil $z = o$ auch $\mathfrak{AS} z = o$ giebt, so ist hier keine beständige Größe zuzusetzen.

II. Es ist (§. 2)

$$\partial \mathfrak{AS}' z = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$

Da

Da dieses Differenzial nur durch das negative Zeichen vom vorigen unterschieden ist, so wird

$$\mathfrak{AS}'z = C - z - \frac{z^3}{2.3} - \frac{3z^5}{2.4.5} - \frac{3.5.z^7}{2.4.6.7} - \&c.$$

Wenn z oder der Kosinus $= o$ wird, so wird $\mathfrak{AS}'z$ zum Viertelzirkel. Es sey π der ganze Umkreis für den Durchmesser 1, oder der halbe Umkreis für den Halbmesser 1, so ist $\frac{1}{2}\pi$ der Viertel-Umkreis für den Halbmesser 1. Wenn demnach $z = o$, und zugleich $\mathfrak{AS}'z = \frac{1}{2}\pi$ wird, so ist

$$\tfrac{1}{2}\pi = C - o - o - o \;\&c.$$

oder $C = \frac{1}{2}\pi$.

Folglich ist

$$\mathfrak{AS}'z = \tfrac{1}{2}\pi - z - \frac{z^3}{2.3} - \frac{3.z^5}{2.4.5} - \&c.$$

$$\text{oder } \mathfrak{AS}'z = \tfrac{1}{2}\pi - \left(z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{3.z^5}{2.4.5} + \&c.\right)$$

das heißt

$$\mathfrak{AS}'z = \tfrac{1}{2}\pi - \mathfrak{AS}z$$

III) Es ist (§. 2)

$$d\mathfrak{AT}z = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

Man entwickele den Bruch $\frac{1}{1+z^2}$ in eine unendliche Reihe, entweder durch die Division, oder durch willkührliche Koeffizienten, (VII. H. § 14.) so kömmt

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \&c.$$

$$\text{und } \frac{dz}{1+z^2} = dz - z^2 dz + z^4 dz - z^6 dz + z^8 dz - z^{10} dz + \&c.$$

Wenn man integriret, so kömmt

$$\text{AT}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \&c.$$

oder

$$\text{AT}z = z + \frac{z^5}{5} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{13}}{12} + \&c.$$

$$- \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^{11}}{11} + \&c. \right)$$

Die beständige Größe die hier zuzusetzen wäre, wird $= o$, weil, wenn $z = o$, auch $\text{AT}z$ null werden muß.

So könnte man weiter gehen und den Bogen in einer unendlichen Funkzion der Kotangente, Sekante, Kosekante, der Sinusversus, und Kosinusversus suchen. Es werden aber solche Reihen selten gebrauchet. Sollte man sie nöthig haben, so kann man aus vorigen Exempeln sehen, auf welche Art sie berechnet werden.

§. 5.

Aufgabe.

Aus dem gegebenen Bogen soll der Sinus, der Kosinus, die Tangente, ꝛc. gefunden werden.

Auflösung. Die im vorigen Paragraph gefundenen Reihen drücken den Bogen in einer unendlichen Funkzion des Sinus, des Kosinus, der Tangente, u. s. f. aus. Kehret man diese Reihen um, so bekömmt man den Si-

nus,

nus, den Kosinus, die Tangente u. s. f. in einer unendlichen Funkzion des Bogens (VII H. §. 20). Wir wollen nur den Sinus zum Beispiele nehmen. Es wurde kurz vorher gefunden

$$\mathfrak{A}\mathfrak{S}z = z + \frac{z^3}{6} + \frac{3z^5}{40} + \frac{5 \cdot z^7}{112} + \frac{35 \cdot z^9}{1152} + \&c.$$

Es werde, der Kürze halben, $\mathfrak{A}\mathfrak{S}z$ durch u ausgedrücket, so ist

$$u = z + \frac{z^3}{6} + \frac{3z^5}{40} + \frac{5z^7}{112} + \frac{35z^9}{1152} + \&c.$$

Man nehme an es sey

$$z = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + Eu^9 + \&c.$$

Man setze nun diese Reihe und ihre Potenzen in die vorige Gleichung, anstatt z und dessen Potenzen. Man vergleiche die Koeffizienten, und verfahre überhaupt wie bei der Umkehrung der Reihen gelehret worden (VII. H. §. 20) so wird man finden

$$z = u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \frac{u^7}{5040} + \frac{u^9}{326880} - \&c.$$

oder

$$z = u - \frac{u^3}{2 \cdot 3} + \frac{u^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{u^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{u^9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \&c.$$

oder, weil z der Sinus des Bogens u ist,

$$\mathfrak{S}u = u - \frac{u^3}{2 \cdot 3} + \frac{u^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{u^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \&c.$$

Der Kosinus eines Bogens könnte auf eine ähnliche Art gefunden werden. Es ist aber bequemer, ihn aus dem Sinus zu suchen. Denn es ist bekannt, daß

$$\mathfrak{S}'u = \sqrt{(1 - \mathfrak{S}u^2)}$$

Man

Man nehme an, es sey

$$\sqrt{(1-Su^2)} = A + Bu^2 + Cu^4 + Du^6 + \&c.$$

Man quadrire beiderseits. Man setze im ersten Gliede der Gleichung anstatt Su^2 das Quadrat der Reihe

$$u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5} - \&c.$$ welche Su ausdrücket.

Man vergleiche die Koeffizienten. So findet man

$$\sqrt{(1-Su^2)} = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

oder $$S'u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

Zusatz. Vermittelst der beiden gefundenen Reihen

$$Su = u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$S'u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

ließen sich die trigonometrischen Tafeln berechnen, wenn sie nicht vorhanden wären. Man müßte nemlich jeden Bogen nicht in Graden, sondern in Theilen des Halbmessers ausdrücken. Die gefundene Zahl müßte man anstatt u in beide vorige Reihen setzen, so bekäme man den Sinus und den Kosinus. Aus dem Sinus und dem Kosinus ließen sich ohne viel Mühe die übrigen trigonometrischen Linien finden.

Funf=

Funfzehntes Hauptstück.

Von der Zykloïde.

§. 1.

Wir haben in beiden vorhergehenden Hauptstücken gesehen, was transzendente Größen sind, nemlich solche die sich nicht durch die gewöhnlichen Operazionen der Arithmetik und Algebra berechnen lassen. Zu dieser Art Grössen gehören hauptsächlich die Logarithmen und die Zirkelgrößen. Wenn nun in der Gleichung einer krummen Linie dergleichen Größen vorkommen, so wird die Linie deswegen **transzendent** genannt; und im Gegensatze sind diejenigen Linien, deren Gleichungen nicht solche Größen enthalten, **algebraïsche Linien.**

Wir haben schon im XIIIten Hauptstücke von einer transzendenten Linie geredet, nemlich von der logarithmischen. Jezt wollen wir eine andere betrachten, welche die Zykloïde genannt wird. Wegen ihrer Nützlichkeit in der Mechanik, und ihrer merkwürdigen Eigenschaften, verdienet sie eine besondere Aufmerksamkeit.

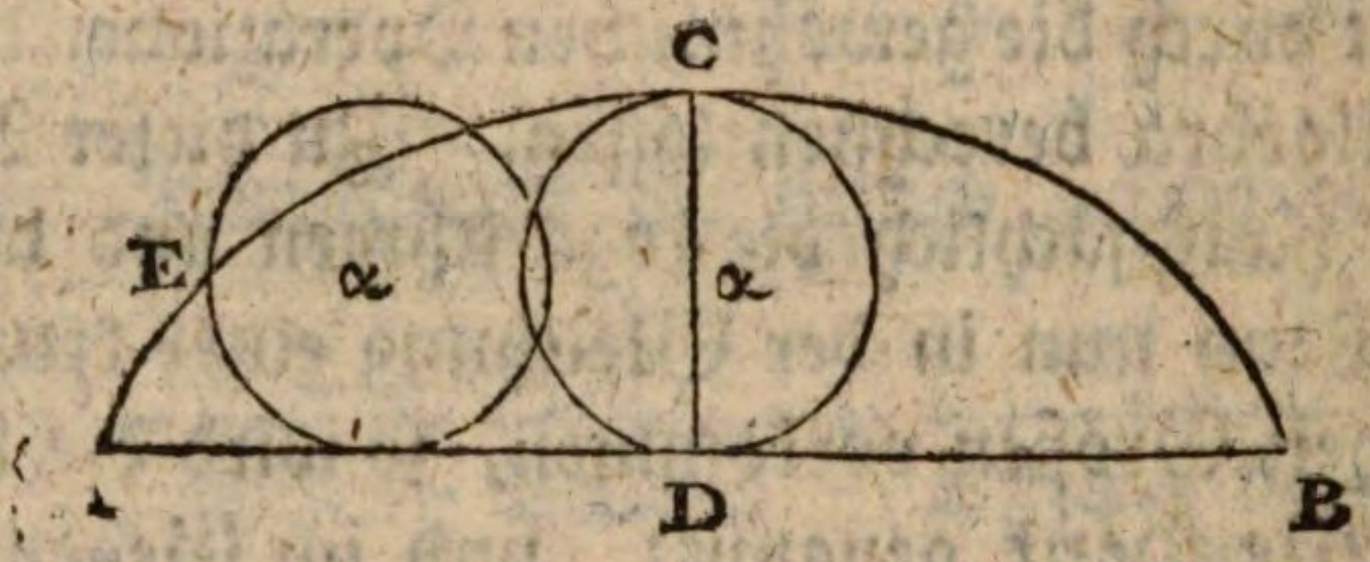
§. 2.

Es werde ein Zirkel α in einer Ebne längs einer geraden Linie AB gerollt, so daß er dieselbe beständig berühre. Während dieser Bewegung wird jeder bestimmte Punkt des Umkreises, als E oder C, auf der Ebne eine krumme Linie

nie

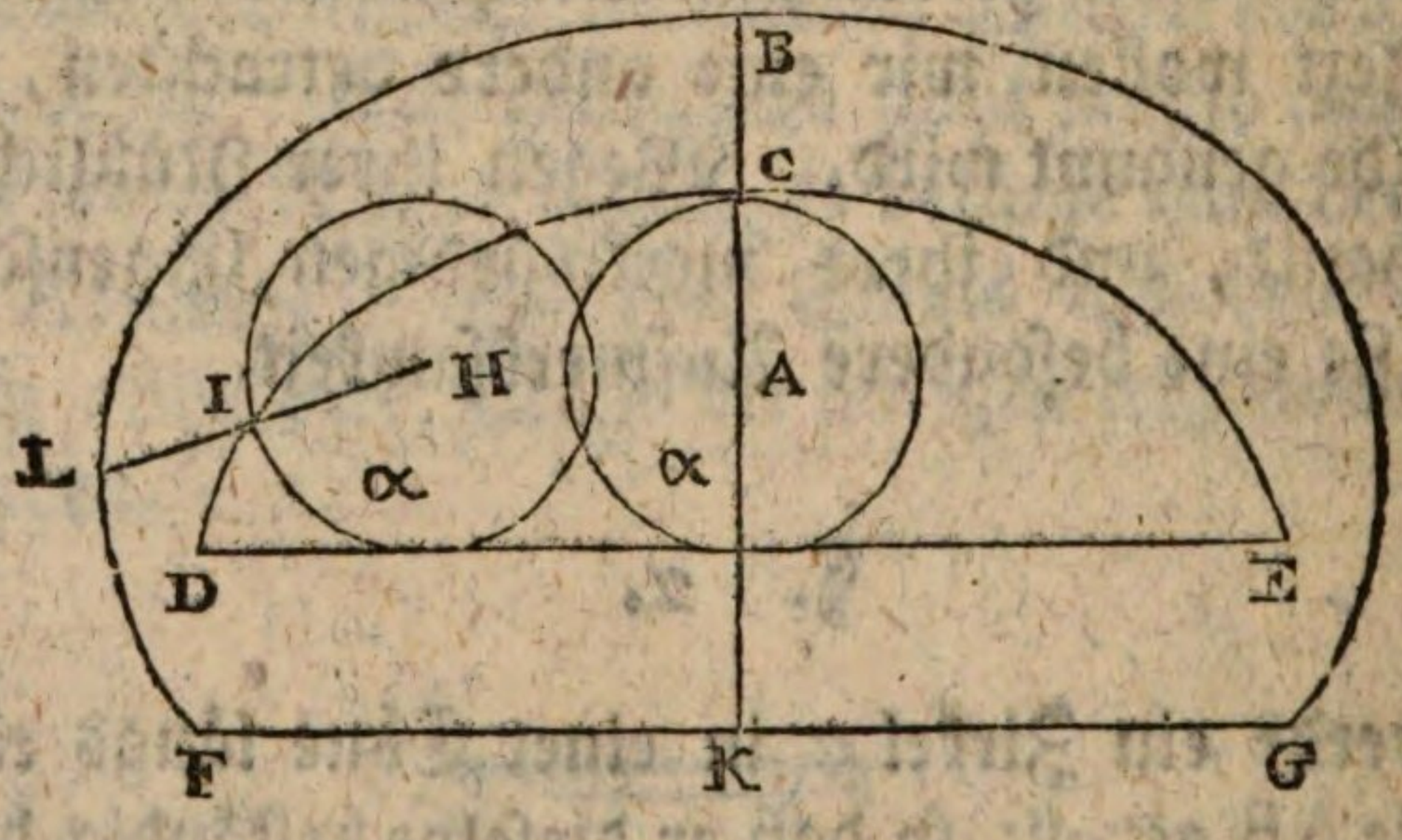
nie beschrieben, welche die einfache Zykloïde genannt wird. Will man diese Linie ganz haben, so muß man den Zirkel so lange rollen, bis daß der beschreibende Punkt, welcher anfänglich die gerade Linie in A berührte, sie wiederum in B berühre. Eine solche Linie beschreibet jeder Nagel am Umfange eines Wagenrades, indem der Wagen gerade fortfährt.

Die gerade AB wird die Basis oder Grundlinie der Zykloïde genannt. Die senkrechte CD, welcher über der Mitte der AB stehet, ist die Axe. Der Zirkel α ist der beschreibende oder erzeugende Zirkel. Er hat die Axe CD zum Durchmesser.



§. 3.

Während daß der Zirkel α mit dem Ende C oder I seines Halbmessers AC oder HI die einfache Zykloïde DICE



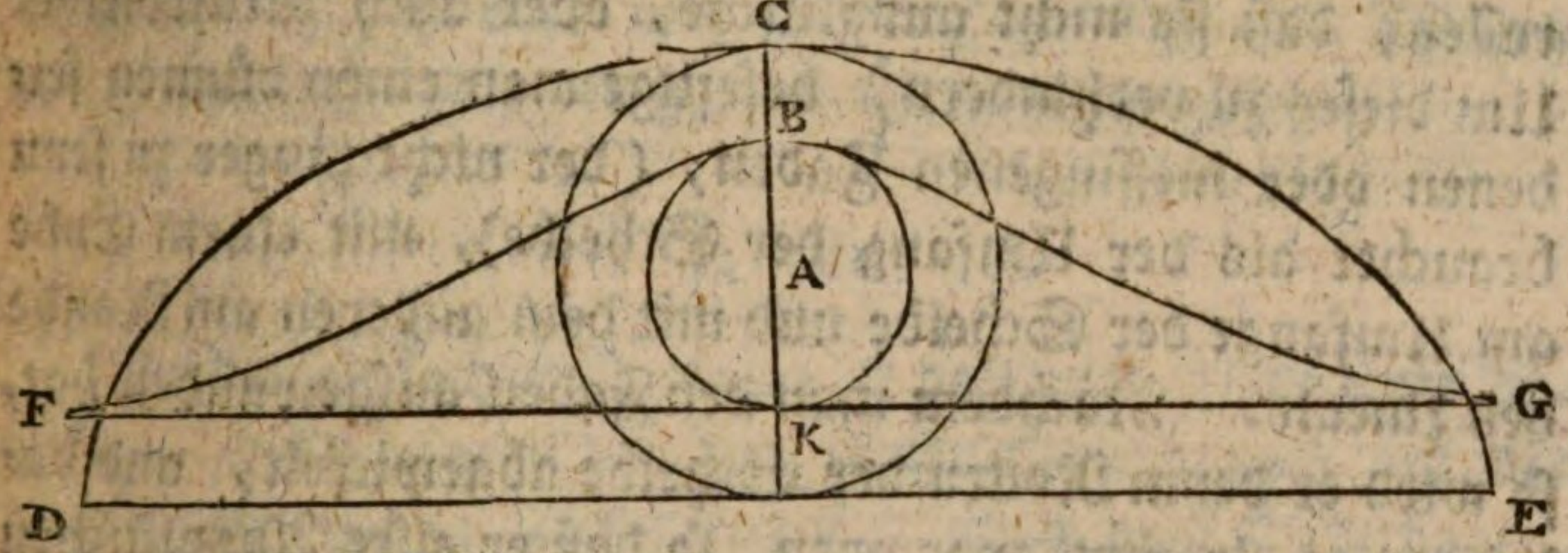
beschreibet; so stellet euch vor, daß der nemliche, jedoch verlängerte Halbmesser AB oder HL, mit seinem Ende B

oder

oder L ebenfalls eine krumme Linie FLBG beschreibe; so wird diese Linie die verkürzte Zykloïde genannt, weil die Grundlinie FG in Betrachtung des Umfanges der krummen Linie, kürzer ist, als bei der einfachen Zykloïde. Hier ist der erzeugende Zirkel nicht mehr der Zirkel α, sondern ein größerer Zirkel, welcher HL oder AB zum Halbmesser, und die Axe BK zum Durchmesser hat.

§. 4.

Während daß der Zirkel A, mit dem Ende C seines Halbmessers AC eine Zykloïde DCE beschreibet, so sey in



diesem Halbmesser ein Punkt B, welcher näher am Mittelpunkt des Zirkels liege, und welcher ebenfalls eine krumme Linie FBG beschreibe. Diese krumme Linie wird eine verlängerte Zykloïde genannt, weil die Grundlinie FG in Beziehung auf den Umfang der krummen Linie länger ist als bei der einfachen Zykloïde. Hier ist der erzeugende Zirkel derjenige, welcher AB zum Halbmesser oder die Axe BK zum Durchmesser hat.

§. 5.

Ein jeder, der eine Zykloïde zeichnen will, wird leicht auf den Einfall gerathen, auf dem Papiere, längs einem Lineale, eine runde hölzerne oder metallene Scheibe zu rollen, nachdem am Umfange derselben ein Stift befestiget worden, um die krumme Linie zu zeichnen. Dieses giebt

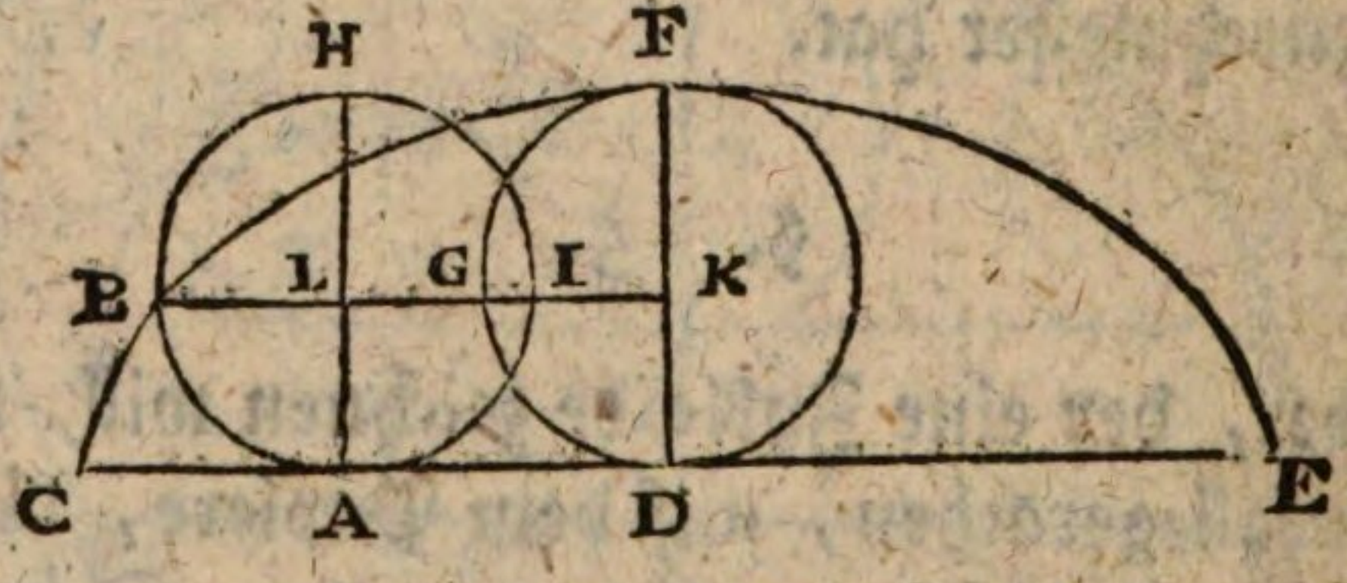
die

die einfache Zykloïde: ist der Stift näher am Mittelpunkte, so bekömmt man die verlängerte Zykloïde. Wird der Stift am Ende eines an der Scheibe befestigten Armes angebracht, so bekömmt man die verkürzte Zykloïde. In diesem letzten Falle muß das Lineal wenig Breite haben, auf daß die krumme Linie jenseit desselben vollendet, und die fehlende Stücke aus freyer Hand ergänzet werden können. Oder man müßte das Lineal an beiden Enden etwas erhöhen, so daß der Arm an der Scheibe, unter demselben durchgehen könne.

In allen drei Fällen ist es schwer, die Scheibe so zu rollen, daß sie nicht ausglitsche, oder auch zurückbleibe. Um dieses zu verhindern, befestige man einen dünnen seidenen oder messingenen Faden, (der nicht länger zu seyn brauchet als der Umfang der Scheibe), mit einem Ende am Umfange der Scheibe und mit dem anderen am Rande des Lineals. Nachdem man den Faden aufgewunden hat, so wird er beym Rollen der Scheibe abgewickelt, und dabei etwas stramm angezogen, so daß er alles Ausglitschen und Zurückbleiben der Scheibe verhindere.

§. 6.

In der einfachen Zykloïde ist der Bogen AB des erzeugenden Zirkels, welcher schon die Grundlinie berühret



und den Theil CB der Zykloïde beschrieben hat, gleich dem Theile AC der Grundlinie, worauf er gerollet hat.

Denn

Denn da alle kleinsten Theile des Bogens AB nach und nach auf den kleinsten Theile der geraden AC gelegen haben, so sind solche Theile beiderseits gleich, folglich auch deren Summen, nemlich der Bogen AB und die gerade AC.

§. 7.

In der einfachen Zykloïde ist die Grundlinie gleich dem Umkreise des erzeugenden Zirkels, und die halbe Grundlinie ist gleich dem halben Umkreise.

Denn alle kleinsten Theile des Umkreises oder halben Umkreises haben nach und nach auf den kleinsten Theilen der Grundlinie oder der halben Grundlinie gelegen.

§. 8.

In der einfachen Zykloïde ist derjenige Theil einer Applikate, welcher zwischen der Zykloïde und dem auf der Axe beschriebenen Zirkel lieget, gleich dem Zirkelbogen, den sie abschneidet, welcher Zirkelbogen vom Scheitel der krummen Linie an gerechnet wird.

Denn es ist $LG = LG$
addire $BL = GK$
so kömmt $BG - LK$
oder $BG = AD$

Ferner ist (§. 7.)

$$CA + AD = DG + GF$$

subtrahire $CA = DG (= AB)$
bleibet $AD - GF$
oder $LK - GF$
oder $BG = GF$

welches zu beweisen war.

Zusatz. Es sey $FK = x$, $KB = y$

Nun ist $KB = BG + GK$

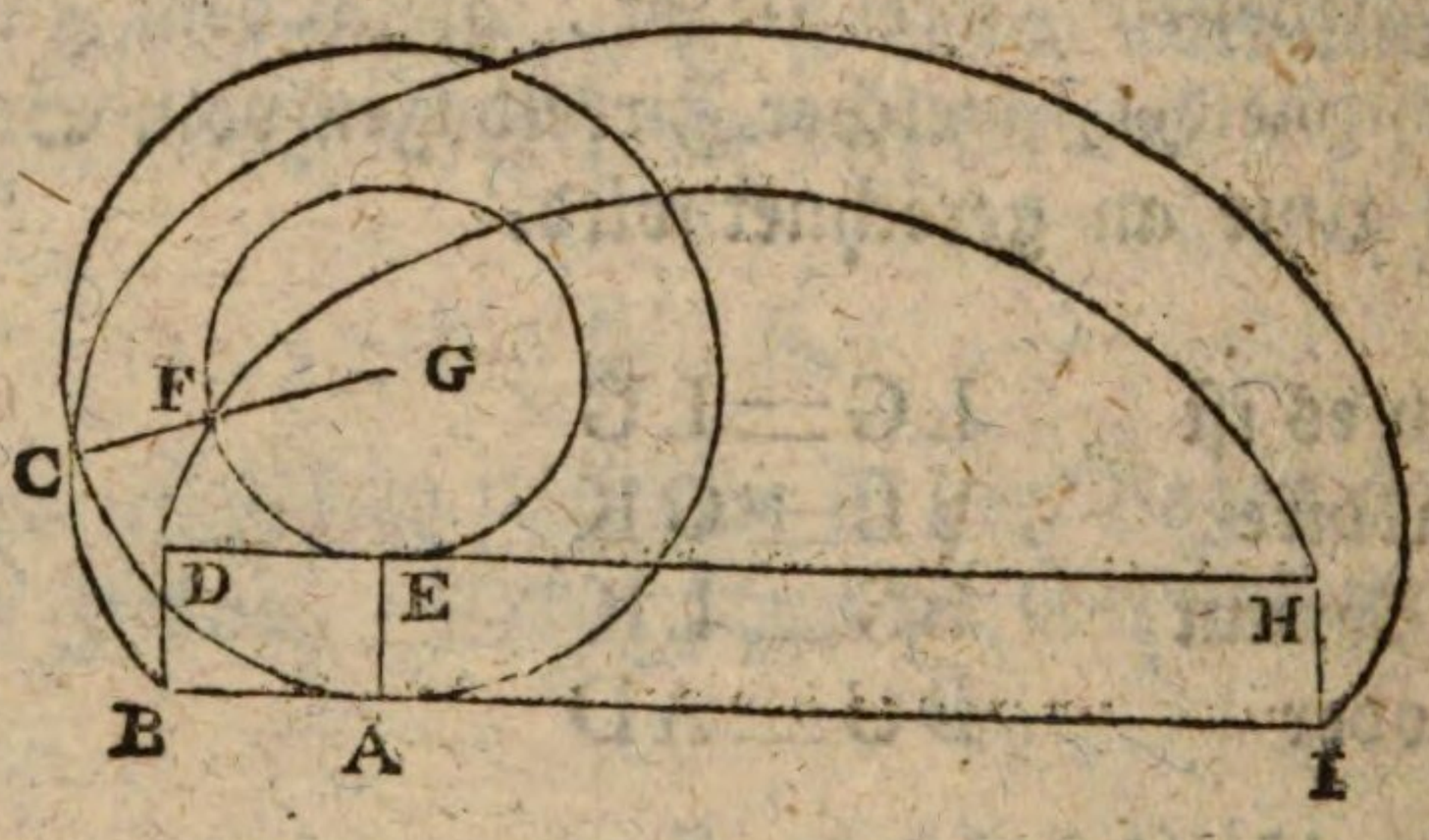
folglich $KB = FG + GK$

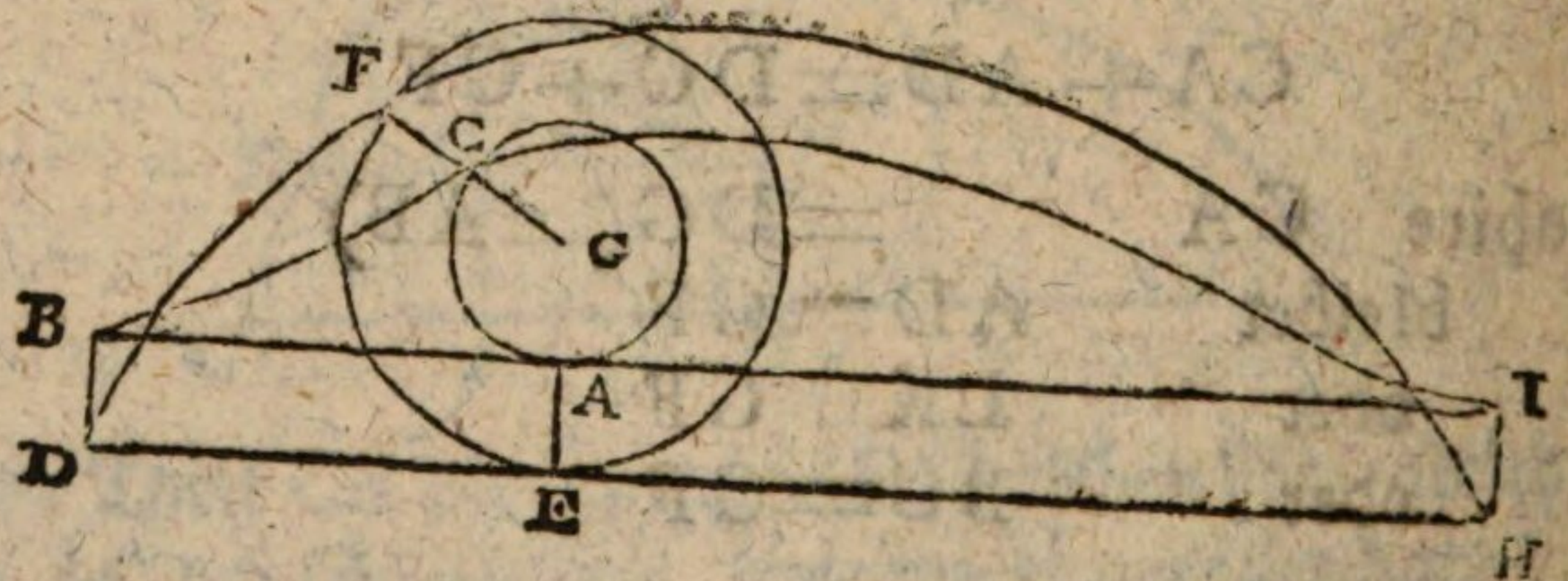
Es ist aber FG der Bogen, welcher FK oder x zum Sinus-Versus hat, und GK ist $= \sqrt{(2x - x^2)}$ wenn nemlich die Axe $FD = 2$. Folglich ist die Gleichung für die einfache Zykloïde

$$y = \text{AV}x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

§. 9.

In der verlängerten oder verkürzten Zykloïde verhält sich der Zirkelbogen, der schon einen Theil der Zykloïde beschrieben hat, zum darzu gehörigen Theile der Grundlinie, wie der ganze Umfang des erzeugenden Zirkels zur ganzen Grundlinie, oder wie der halbe Umfang zur halben Grundlinie.





Es

Es werde eine gemeine Zykloïde DFH von einem Zirkel beschrieben, der GF zum Halbmesser hat. Zugleich werde eine verlängerte oder verkürzte Zykloïde vom Halbmesser GC beschrieben.

Zuförderst ist leicht einzusehen, daß, wann der erzeugende Zirkel der einfachen Zykloïde, deren Grundlinie in D oder H berühret, alsdann der Halbmesser GF oder GC, welcher die Zykloïde beschreibet, auf DH senkrecht seyn müsse, und daß sowohl DB als HI der FC gleich seyn müssen. Hieraus folget, daß BI mit DH parallel und gleich sey. Ziehet man EA senkrecht auf beiden Grundlinien, so ist auch BA = DE. Also ist

BA (= DE) = Bogen FE.

Es ist aber

Bog. FE zu Bog. CA :: GF zu GC

Folglich BA zu Bog. CA :: GF, GC

Nun verhalten sich die Halbmesser GF, GC, wie die Umkreise ihrer Zirkel. Also ist

GF zu GC :: Zirk. GF zu Zirk. GC.

Es ist aber Zirk. GF = DH = BI (§. 7.)

also ist GF zu GC :: BI zu Zirk. GC

Wir haben aber gesehen, daß

BA zu Bog. CA :: GF zu GC

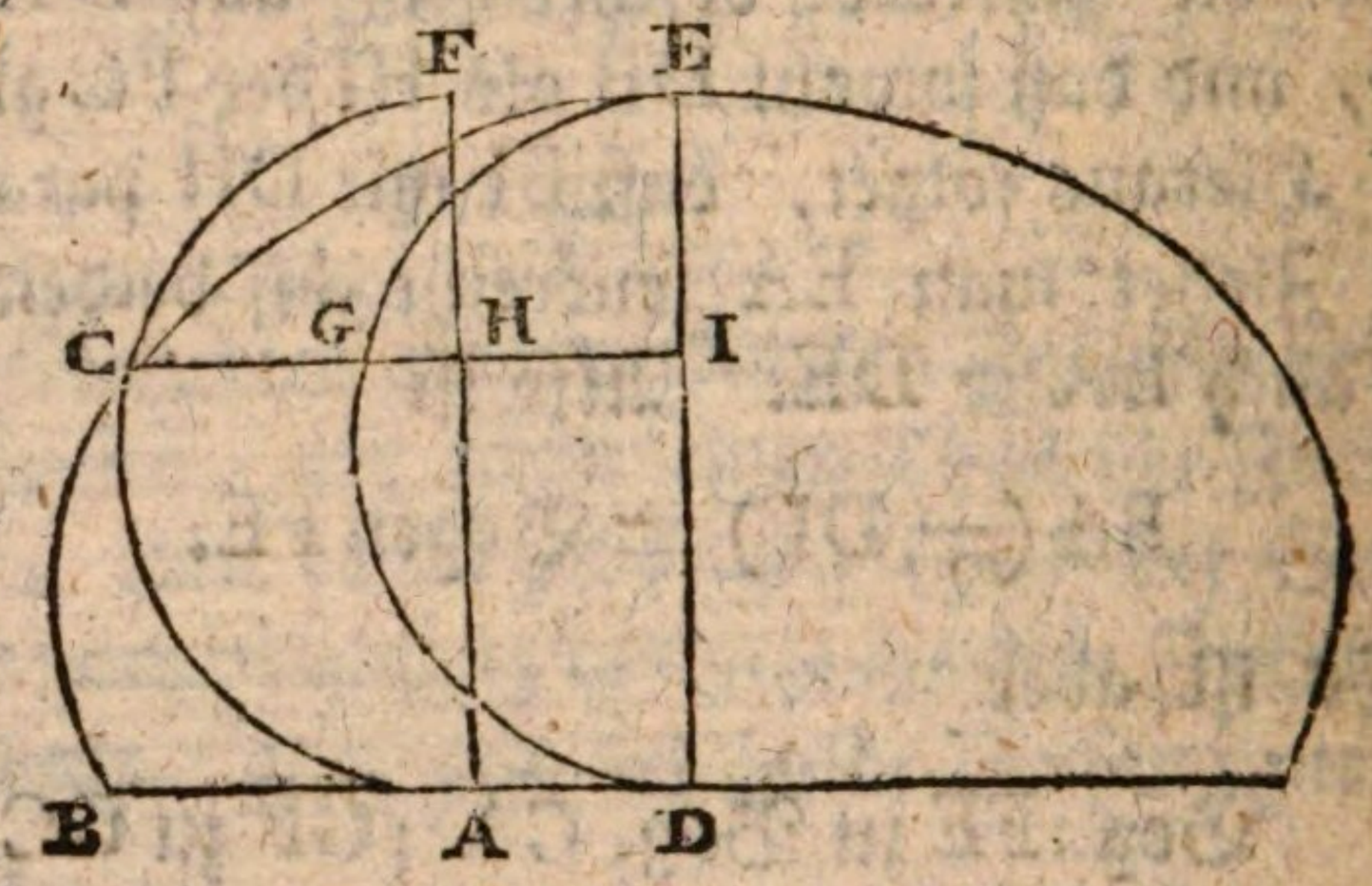
Daher folget, daß

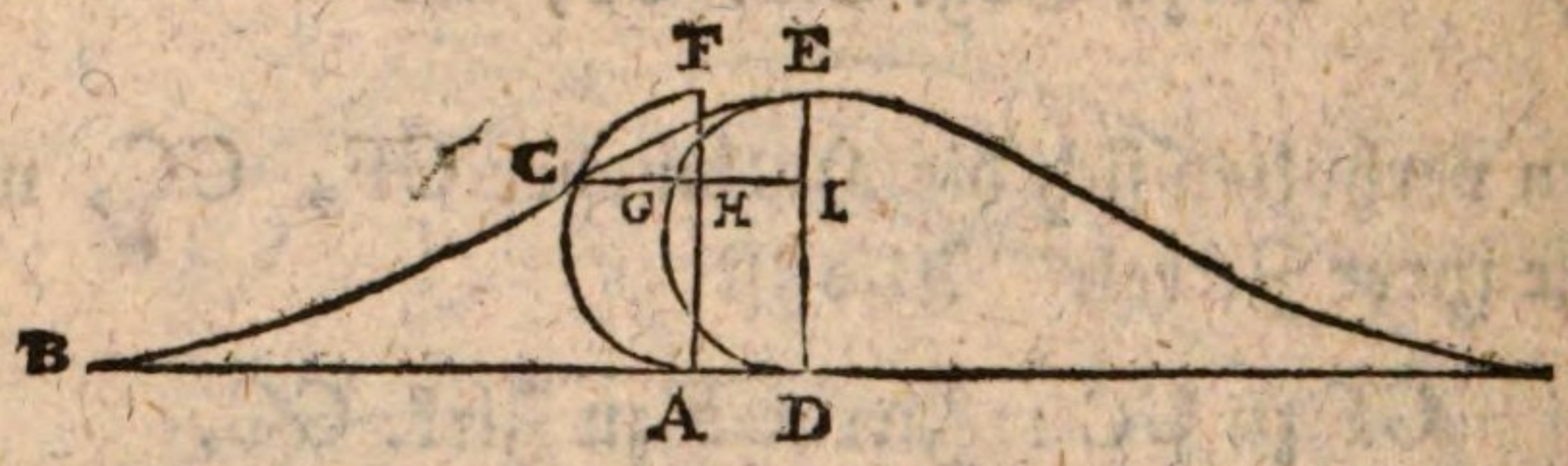
BA zum Bog. CA :: BI zu Zirk. GC

in welcher Proporzion Zirk. GC den Umfang des erzeugenden Zirkels bedeutet.

§. 10.

In der verlängerten oder verkürzten Zykloïde, wenn man den erzeugenden Zirkel auf der Axe beschreibet, so verhält sich der zwischen diesem Zirkel und der Zykloïde liegende Theil der Applikate, zum abgeschnittenen Zirkelbogen (welcher vom Scheitel an gerechnet wird) wie die Grundlinie sich verhält zum Umkreise des erzeugenden Zirkels.





Es ist (§. 9.)

BD zum Bogen DGE :: BA zum Bogen AC

oder BD, BA :: Bog. DGE, Bogen AC

oder, weil Bog. AC = Bog. DG

BD, BA :: Bog. DGE, Bog. DG.

Folglich ist

(BD — BA), BD :: (DGE — DG), DGE

oder AD, BD :: GE, DGE

oder AD, GE :: BD, DGE

Es

Es ist aber $AD = HI$

und $\ldots HI + HG = CG + HG$

folglich $HI \ldots = GG$

oder $AD \ldots = CG$

Setzet man in die letzte Proporzion CG anstatt AD

so ist CG, Bog GE :: BD, Bogen DGE

oder CG, Bog. GC :: 2 B D, 2 Bog. DGE

welche Proporzion unseren Lehrsatz ausdrücket.

Zusatz. Es verhalte sich die Grundlinie der verlängerten oder verkürzten Zykloïde zum Umfange des erzeugenden Zirkels, wie b zu c, so ist

CG, Bog. GE :: b zu c

daher $CG = \frac{b}{c}$ Bog. GE

Es sey ferner $EI = x$, und $IC = y$, so wird seyn

$y = CG + GI$. Nun ist $CG = \frac{b}{c}$ Bog. GE oder $\frac{b}{c}$ $\mathfrak{A}\mathfrak{V} x$, und $GI = \sqrt{(2x - x^2)}$ wenn nemlich die Axe $ED = 2$

Folglich ist $y = \frac{b}{c}\mathfrak{A}\mathfrak{V} x + \sqrt{(2x - x^2)}$

Diese Gleichung kann für allerley Zykloïden dienen. Denn, wann $b = c$, so ist es die einfache Zykloïde. Wann $b < c$, so ist es die verkürzte Zykloïde. Wann $b > c$, so ist es die verlängerte Zykloïde.

§. 11.

Aufgabe.

Die Subtangente in der Zykloïde finden.

Auflösung.

Es ist bekanntermaaßen (VIII. H. §. 2.)

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy}$$

Wenn nun $y = \frac{b}{c}\text{AD}x + \sqrt{(2x - x^2)}$

so ist $$dy = \frac{b}{c}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)}} + \frac{(1-x)dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$dy = \frac{\left(\frac{b}{c} + 1 - x\right)dx}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b}{c} + 1 - x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{(2x-x^2)}}{\frac{b}{c} + 1 - x}$$

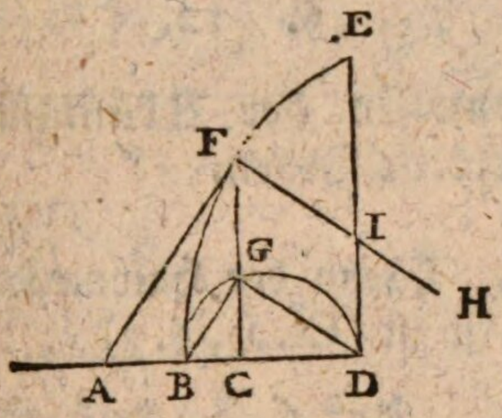
$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{y\sqrt{(2x-x^2)}}{\frac{b}{c} + 1 - x}$$

Dieses ist demnach die Formel, wodurch man die Subtangente jeder Zykloïde berechnen kann.

Zusatz. In der einfachen Zykloïde ist $b = c$, folglich $\frac{b}{c} = 1$, deswegen wird die Subtangente

$$\frac{y\sqrt{(2x - x^2)}}{2 - x}$$

das heißt $(2 - x)$, $\sqrt{(2x - x^2)} :: y$, Subtangente; welche Proporzion eine sehr leichte geometrische Konstrukzion giebt.



Es sey BFE die Hälfte einer einfachen Zykloïde, worin die Axe BD ist, die halbe Grundlinie = DE, die Hälfte des erzeugenden Zirkels = BGD. Gesetzt, es soll die Subtangente zum Punkte F gefunden werden. Ziehe FC $(= y)$. Ziehe auch die Sehne GB. Ziehe FA mit dieser Sehne parallel, so wird FA die Tangente, und folglich CA die Subtangente.

Denn es soll seyn

$(2 - x)$, $\sqrt{(2x - x^2)} :: y$, Subtangente

Nun ist $2 - x = CD$, $\sqrt{(2x - x^2)} = CG$. Vermöge der Natur des Zirkels ist

DC, GC :: GC, CB

Es ist auch, wegen der ähnlichen Dreiecke

GC, CB :: FC, CA

folglich DC, GC :: FC, CA

oder $(2 - x)$, $\sqrt{(2x - x^2)}$ :: y, Subtangente.

Anmerkung. Die Formeln für die Tangente, die Subnormal-Linie, welche gehörigen Ortes (VIII H. §. 2.) gegeben worden, können ebenfalls auf die Zykloïde angewandt werden.

§. 12.

Den Halbmesser der Krümmung für jeden Punkt der Zykloïde finden.

Auflösung. Wenn der Halbmesser der Krümmung r genannt wird, so ist (IX. H. §. 7)

$$r = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Wir haben für die Zykloïde gefunden

$$dy = \frac{\left(\frac{b}{c} + 1 - x\right)dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

oder $dy = \left(\frac{b}{c} + 1 - x\right)(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

oder $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{b}{c} + 1 - x\right)(2x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

ist nun dx beständig, so wird

$$\frac{d^2y}{dx} = -(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx - \left(\frac{b}{c}+1-x\right)(2x-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x)\,|\,dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{c}+1-x\right)(2x-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2x-x^2)+\left(\frac{b}{c}+1-x\right)(1-x)}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x-x^2+\left(\frac{b}{c}+1-x\right)(1-x)}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich

$$\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}$$

und $$\frac{dx^2}{-d^2y} = +\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}$$

Es war

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b}{c}+1-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}$$

folglich $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\left(\frac{b}{c}+1-x\right)^2}{2x-x^2}$

$$1+\frac{dy^2}{dx^2} = 1+\frac{\left(\frac{b}{c}+1-x\right)^2}{2x-x^2}$$

$$= \frac{2x-x^2+\left(\frac{b}{c}+1-x\right)^2}{2x-x^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}-\frac{2b}{c}x+1}{2x-x^2}$$

Setzet man diese Werthe in die allgemeine Formel, so kömmt

$$r = \frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}\left(\frac{\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}-\frac{2b}{c}x+1}{2x-x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$r = \frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}\cdot\frac{\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+1-\frac{2b}{c}x\right)^{\frac{3}{2}}}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r = \frac{\left[\left(\frac{b}{c}+1\right)^2-\frac{2b}{c}x\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{c}+1-\frac{b}{c}x}$$

In

In der einfachen Zykloide ist $\frac{b}{c} = 1$, und dann wird

$$r = \frac{(4-2x)^{\frac{3}{2}}}{2-x}$$

$$r = \frac{(4-2x)\sqrt{(4-2x)}}{2-x}$$

$$r = \frac{2(2-x)\sqrt{(4-2x)}}{2-x}$$

$$r = 2\sqrt{(4-2x)}$$

$$r = 2\sqrt{[2.(2-x)]}$$

das heißt, in der einfachen Zykloide ist der Halbmesser der Krümmung doppelt so groß als die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Axe (2) und der Axe weniger der Abzisse $(2-x)$. Ziehet man demnach in der lezten Figur die Sehen GD, so ist sie die Hälfte des Halbmessers der Krümmung für den Punkt F, weil wegen des rechtwinklichen Dreieckes BGD, GD die mitlere Proporzional-Linie ist zwischen BD $(=2)$ und CD $(=2-x)$.

Ziehet man FH mit GD parallel, das ist auf GB oder FA senkrecht, und machet FH $=$ 2 GD oder IH $=$ GD, so ist FH der Halbmesser der Krümmung für den Punkt F.

§. 13.

Die Evolute der einfachen Zykloide finden.

Auflösung. Wenn die Abzisse der gegebenen krummen Linie $= x$, deren Applikate $= y$, die Abzisse der Evolute $= z$, deren Applikate $= u$, so ist (IX H. §. 9.).

$x =$

$$x = z + \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx}$$

$$y = -u - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

wo das erste Differenzial von x als beständig betrachtet wird. Nun ist vorher gefunden worden für die einfache Zykloïde,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{4 - 2x}{2x - x^2}$$

$$\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}{2 - x}$$

folglich ist

$$\frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx} = -\frac{(2 - x)}{\sqrt{(2x - x^2)}}.\frac{(4 - 2x)}{(2x - x^2)}.$$

$$\frac{(2x - x^2)\sqrt{(2x - x^2)}}{2 - x}$$

$$= -(4 - 2x)$$

$$= 2x - 4$$

Also ist $x = z + 2x - 4$

oder $o = z + x - 4$

oder $4 - z = x$

Ferner

Ferner ist

$$-\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=+\frac{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{2-x}\cdot\frac{4-2x}{2x-x^2}$$

$$=\frac{(2x-x^2).\sqrt{(2x-x^2)}.2(2-x)}{(2-x)(2x-x^2)}$$

$$=2\sqrt{(2x-x^2)}$$

Folglich ist $y=-u+2\sqrt{(2x-x^2)}$

Setzet man hier anstatt x dessen gefundenen Werth $4-z$, so ist $y=-u+2\sqrt{(6z-z^2-8)}$

Die Gleichung der Zykloïde ist

$$y=\mathfrak{AV}x+\sqrt{(2x-xx)}$$

Setzet man nun anstatt y und x die gefundenen Werthe, so kömmt

$$-u+2\sqrt{(6z-z^2-8)}=\mathfrak{AV}(4-z)+\sqrt{(6z-z^2-8)}$$

$$-u+\sqrt{(6z-z^2-8)}=\mathfrak{AV}(4-z)$$

oder

$$-u+\sqrt{[2(4-z)-(4-z)^2]}=\mathfrak{AV}(4-z)$$

oder

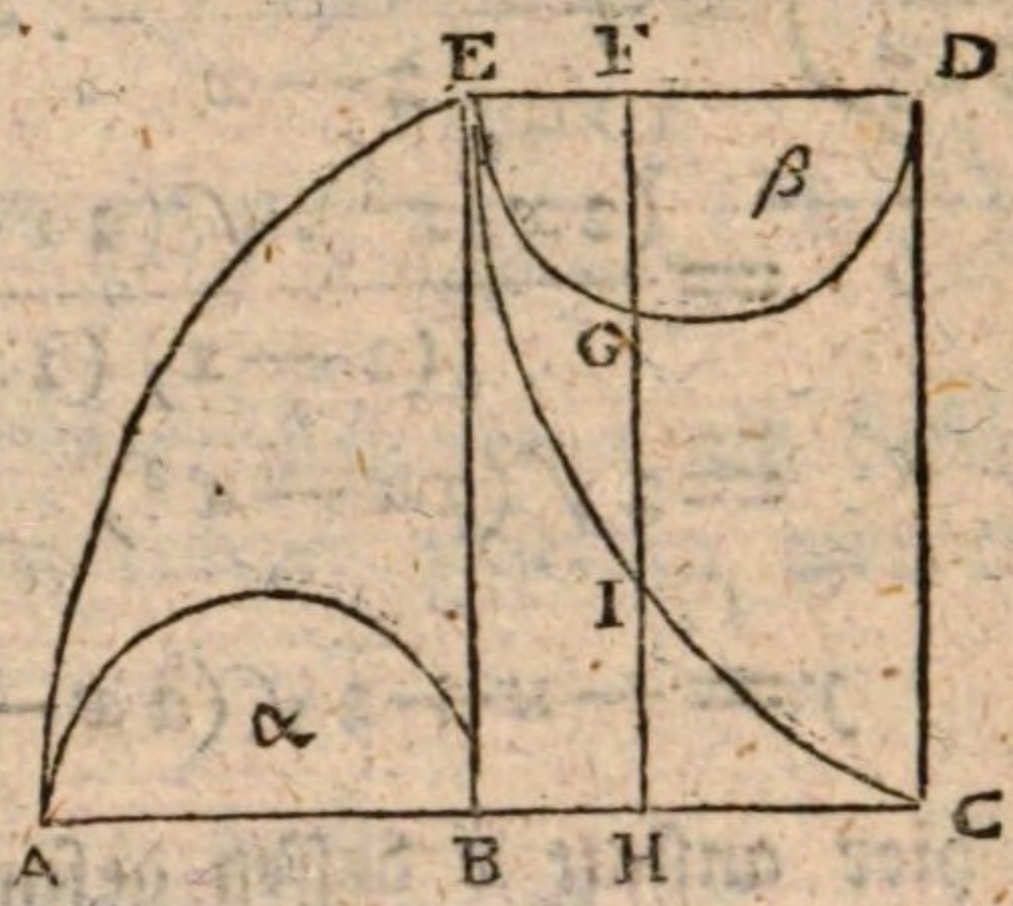
$$-u=\mathfrak{AV}(4-z)-\sqrt{[2(4-z)-(4-z)^2]}$$

Es sey $4-z=v$, so ist

$$-u=\mathfrak{AV}v-\sqrt{(2v-v^2)}$$

Diese Gleichung drücket also die Evolute der einfachen Zykloïde aus. Das Zeichen $-$, welches hier vor der Applikate u stehet, giebt zu erkennen, daß die Applikate der Evolute nicht unterhalb der Axe fällt, wie bei der allgemeinen Formel angenommen wird (IX. H. §. 9.) sondern

dern oberhalb derselben, wie es in folgender Figur zu sehen ist.



Hier ist nemlich die Linie EC die Evolute der Zykloïde EA, deren Axe AB ist.

Will man erfahren, wo die Evolute anfängt, so setze man o anstatt x im Halbmesser der Krümmung $2\sqrt{(4-2x)}$ welcher oben gefunden worden (§. 12.). Dann wird dieser Halbmesser $2\sqrt{(4-o)}=4$. Folglich, bei dem Punkte A, wo $x=o$ ist, wird der Halbmesser der Krümmung $=4=AC=2AB$, also ist $BC=AB$. Man setze ferner $x=AB=2$, so bekömmt man $2\sqrt{(4-2.)}=2\sqrt{(o)}=o$. Folglich muß im Punkte E, worzu die Abzisse $AB=2$ gehöret, der Halbmesser der Krümmung null werden, und also begegnet daselbst die Zykloïde ihrer Evolute.

Betrachtet man diese Evolute etwas näher, so siehet man, daß es eine Zykloïde ist, welche der gegebenen AE vollkommen ähnlichgleich ist, und nur eine verkehrte Lage hat. Denn wir haben gefunden

$$u=AD(4-z)-\sqrt{[z(4-z)-(4-z)^2]}$$

Hier ist $z=AH$, und $u=HI$

Laßt

Laßt uns nun diese Gleichung verändern, für den Fall, wo man ED zur Direktrize, EF zur Abzisse und FI zur Applikate nehmen wollte; und es sey

$$EF = BH = x, \text{ und } FI = y$$

Nun ist $AH = AB + EF$

$$z = 2 + x$$

Ferner, $IH = FH - FI$

Es ist aber $FH = EB = \pi$, wenn nemlich π den halben Umkreis des erzeugenden Zirkels α bedeutet (§. 7.) dem wir den Zirkel β gleich machen. Folglich wird

$$u = \pi - y$$

Man setze diese Werthe von z und u in die Gleichung der Evolute, nemlich

$$u = \mathfrak{A}\mathfrak{V}(4 - z) - \sqrt{(6z - z^2 - 8)}$$

so ist $\pi - y = \mathfrak{A}\mathfrak{V}(2 - x) - \sqrt{(2x - x^2)}$

$$\pi - \mathfrak{A}\mathfrak{V}(2 - x) + \sqrt{(2x - x^2)} = y$$

Nun ist $\pi - \mathfrak{A}\mathfrak{V}(2 - x) = \mathfrak{A}\mathfrak{V}x$. Denn es ist $FD = 2 - x$, und Bogen $DG = \mathfrak{A}\mathfrak{V}(2 - x)$, folglich $\pi - DG = EG = \mathfrak{A}\mathfrak{V}x$. Also ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{V}x + \sqrt{(2x - x^2)} = y$$

Welches die Gleichung der Zykloïde ist.

§. 14.

Aufgabe.

Die größte Applikate der Zykloïde finden.

Auflösung. Die Applikate erreichet ihren größten oder kleinsten Werth, wenn $\frac{dy}{dx} = o$ (XI. H. §. 3.)

Es

Es ist aber in allen Zykloïden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b}{c} + 1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

Also im Falle der größten oder kleinsten Appkikate der Zykloïde

$$o = \frac{\frac{b}{c} + 1 - x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

folglich $o = \frac{b}{c} + 1 - x$

$$x = \frac{b}{c} + 1$$

oder $x = \frac{b+c}{c}$

oder $x = \frac{(b+c).1}{c}$

oder $c, (b+c) :: 1, x$

Wir müssen nun noch ferner untersuchen, was $\frac{d^2y}{dx^2}$ giebt, wenn $x = \frac{b}{c} + 1$. Es ist in jeder Zykloïde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x}{(2x - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Ist

Ist nun $x = \frac{b}{c} + 1$, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}\left(\frac{b}{c} + 1\right)}{\left[2\left(\frac{b}{c} + 1\right) - \left(\frac{b}{c} + 1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1 - \frac{b^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)}}$$

Hier ist nun ein Unterschied zu machen. In der einfachen Zykloïde ist $b = c$, folglich $1 - \frac{b^2}{c^2} = 1 - 1 = 0$, $\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)} = 0$, folglich $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{0}$, welches eine unendliche Größe ist, und uns zu verstehen giebt, daß hier eigentlich keine größte Applikate Statt findet, wenigstens nicht solche, die beiderseits kleinere neben sich hat. Denn in der einfachen Zykloïde nehmen zwar die Applikaten zu, bis $x = 2$ geworden; sie nehmen aber nicht wieder ab, sondern die Linie endiget sich alsdann, wie auch aus der Gleichung zu sehen, denn weil $y = \text{AV}\, x + \sqrt{(2x - x^2)}$, so wird y imaginär, sobald x größer als 2 angenommen wird.

Ist b größer als c, so wird $\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)}$ eine imaginäre Größe, folglich auch $-1:\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)}$. Da also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ imaginär ist, so findet auch bei der verlängerten Zykloïde keine eigentliche größte Applikate Statt, nemlich keine solche, welche beiderseits kleinere neben sich habe. Man siehet auch gleich, daß $x=\frac{b}{c}+1$, welcher Werth von x, $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu null machet, an sich selbst widersprechend ist; denn da $\frac{b}{c}$ in der verlängerten Zykloïde >1, so ist $\frac{b}{c}+1>2$; es kann aber in der Zykloïde keine Applikate größer als 2 werden.

Ist aber $b<c$, so giebt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{-1}{\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)}}$$

eine wirkliche negative Größe. Daher findet in diesem Falle ein Maximum Statt, und die Applikate erreichet ihren Größen-Werth, wenn $x=1+\frac{b}{c}$, oder wenn

$$c,(b+c)::1,x$$

das heißt, wenn sich die Peripherie des erzeugenden Zirkels, zur Summe dieser Peripherie und der Grundlinie verhält, wie die halbe Axe zur Abzisse.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe.

Es soll untersuchet werden, ob die Zykloïde einen Biegungspunkt hat.

Auflösung. Die allgemeine Regel erfordert, daß man $\frac{d^2y}{dx^2} = o$ setze, um den Biegungspunkt zu finden. Da nun in der Zykloïde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so wird im gegenwärtigen Falle

$$o = -\frac{\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$o = -\left(\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x\right)$$

$$o = -\frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{c}x$$

$$o = -b - c + bx$$

$$b + c = bx$$

$$\frac{b+c}{b} = x \text{ oder } x = 1 + \frac{c}{b}$$

oder $b, (b+c) :: 1, x$

Um nun zu erfahren, ob $x = 1 + \frac{c}{b}$ wirklich einen Bingungspunkt giebt, so müssen wir weiter differenziren.

Es war

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x}{(2x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich wird

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{-\frac{b}{c}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} - 3\left(\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x\right)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x)}{(2x-x^2)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{\frac{b}{c}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3\left(\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x\right)(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x)}{(2x-x^2)^3}$$

Für den Fall nun, wo $x = 1 + \frac{c}{b}$, wird $2x - x^2 = 1 - \frac{c^2}{b^2}$, ferner $\frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}x = \frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c}\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{b}{c} + 1 - \frac{b}{c} - 1 = 0$. Also wird

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{b}{c}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)}{\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ist

Ist nun $c = b$, so wird der Nenner $= o$, folglich bekömmt man eine unendliche Größe. Ist $c > b$, so bekömmt man eine imaginäre Größe. Ist aber $c < b$, so wird der Bruch eine wirkliche positive Größe; und da dieses in der verlängerten Zykloïde Statt findet, so hat diese einen Biegungspunkt, welcher eintrift, wann

$x = 1 + \frac{c}{b}$, oder wann

$$b, (b + c) :: 1, x$$

§. 16.

Aufgabe.

Die Zykloïde rektifiziren.

Auflösung. Es muß diese Formel integriret werden (XI. H. §. 2.)

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Nun ist in der Zykloïde

$$dy = \frac{\left(\frac{b}{c} + 1 - x\right) dx}{\sqrt{(2x - x^2)}}$$

folglich

$$dy^2 = \frac{\left(\frac{b}{c} + 1 - x\right)^2 dx^2}{2x - x^2}$$

$$\text{und } dx^2+dy^2 = dx^2 + \frac{\left(\frac{b}{c}+1-x\right)^2 dx^2}{2x-x^2}$$

$$= \frac{(2x-x^2)dx^2+\left(\frac{b}{c}+1-x\right)^2 dx^2}{2x-x^2}$$

$$= \frac{\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+1-\frac{2b}{c}x}{2x-x^2}\cdot dx^2$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{c}+1\right)^2-\frac{2b}{c}x}{2x-x^2}\cdot dx^2$$

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\frac{\left(\frac{b}{c}+1\right)^2-\frac{2b}{c}x}{2x-x^2}}$$

Dieses Element könnte durch eine unendliche Reihe integriret werden, wenn man nemlich vorher die irrazionale Größe vermöge der willkürlichen Koeffizienten in eine solche Reihe verwandelte.

Weil in der einfachen Zykloïde $b=c$, so wird

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\frac{4-2x}{2x-x^2}}$$

$$= dx\sqrt{\frac{2(2-x)}{x(2-x)}}$$

$$= dx\sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}}\,dx.\sqrt{2}$$

Hier-

Hiervon ist das Integral

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\sqrt{2}$$

oder $$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

oder $$2\,x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$$

oder $$2\sqrt{x}\sqrt{2}$$

oder $$2\sqrt{2x}$$

Also ist das vollständige Integral

$$2\sqrt{2x}+C$$

Soll aber der Bogen der Zykloïde vom Scheitel an gerechnet werden, wo $x=0$, so muß alsdann auch der Bogen $=o$ werden. In diesem Falle ist

$$o=o+C$$

folglich $C=o$

Also drücket $2\sqrt{2x}$ den durch x bestimmten Theil der Zykloïde aus, welcher Theil vom Scheitel an gerechnet wird. Wird nun x der Axe gleich, so ist $x=2$, dann wird

$$2\sqrt{2x}=2\sqrt{4}=4$$

das heißt, die halbe Zykloïde ist der doppelten Axe gleich, folglich ist die ganze Zykloïde viermal so groß als ihre Axe. Dieses ist eine merkwürdige Eigenschaft der einfachen Zykloïde, da es vielleicht keine andere krumme Linie giebt, die sich auf eine so leichte Art rektifiziren läßt.

§. 17.

Aufgabe.

Die Zykloïde quadriren.

Auflösung. Es muß integriret werden $y\,dx$. Nun ist in der Zykloïde

$$y = \frac{b}{c}\,\text{AV}\,x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

folglich $y\,dx = \frac{b}{c}\,\text{AV}\,x.\,dx + dx\sqrt{(2x - x^2)}$

Dieses Element könnte integriret werden, wenn man anstatt AVx, den Bogen der x zum Sinus-Versus hat, durch eine unendliche Reihe ausdrückete (XIV. H. §. 4.). Ebenfalls müste $\sqrt{(2x - x^2)}$ durch eine unendliche Reihe ausgedrücket werden.

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art könnte man durch unendliche Reihen die runde Fläche und den Körper berechnen, welche entstehen, wenn sich die Zykloïde um ihre Axe umwendet, welches aber keinen sonderlichen Nutzen schaffen würde.

Sechszehntes Hauptstück.

Von den krummen Linien die um einen Pol oder einen unverrückten Punkt beschrieben sind.

§. 1.

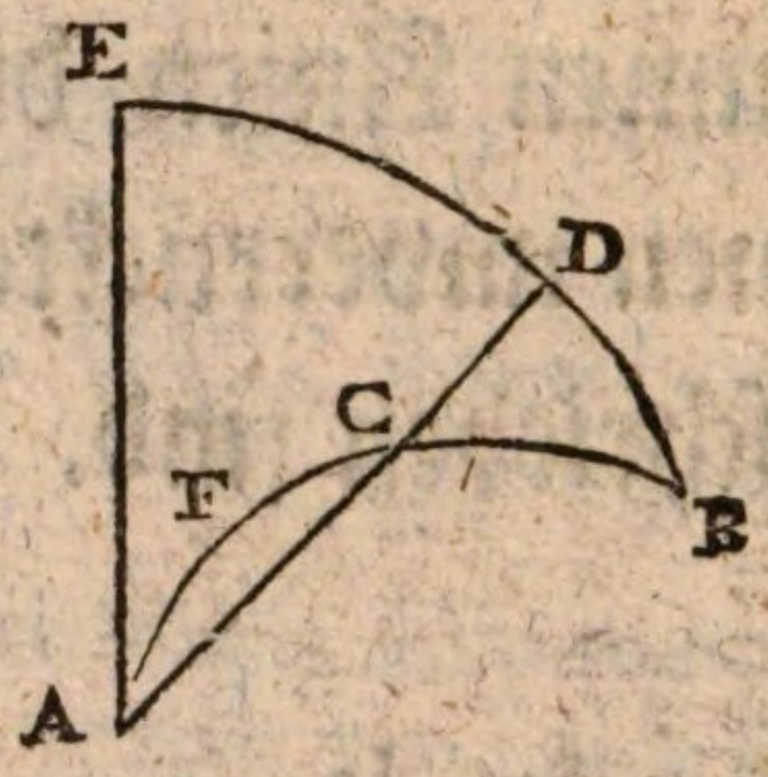
Bisher haben wir keine andere krummen Linien betrachtet, als solche, in denen die Applikaten mit einander parallel sind. Nun müssen wir auch dem Anfänger einen Begriff von solchen Linien geben, wo die Applikaten alle aus einem einzigen Punkte entspringen, und folglich einen veränderlichen Winkel bilden.

Man stelle sich vor, daß sich eine gerade Linie um einen unverrückten Punkt in einer Ebne herum drehe, und daß ein beweglicher Punkt der in der nemlichen geraden Linie allmählig seine Lage verändert, eine krumme Linie beschreibe; so wird der unverrückte Punkt der **Pol** der krummen Linie genannt. Der Theil der geraden Linie der jedesmal vom Pole bis zum beweglichen Punkte gehet, ist ein **Vektor**, oder **Radius-Vektor**. Wir wollen denjenigen Winkel, den die gerade Linie seit dem Anfange ihrer Begegnung beschrieben hat, den **Polar-Winkel** nennen. Nichts hindert uns jede auf solche Art beschriebene Linie eine **Polar-Linie** zu nennen.

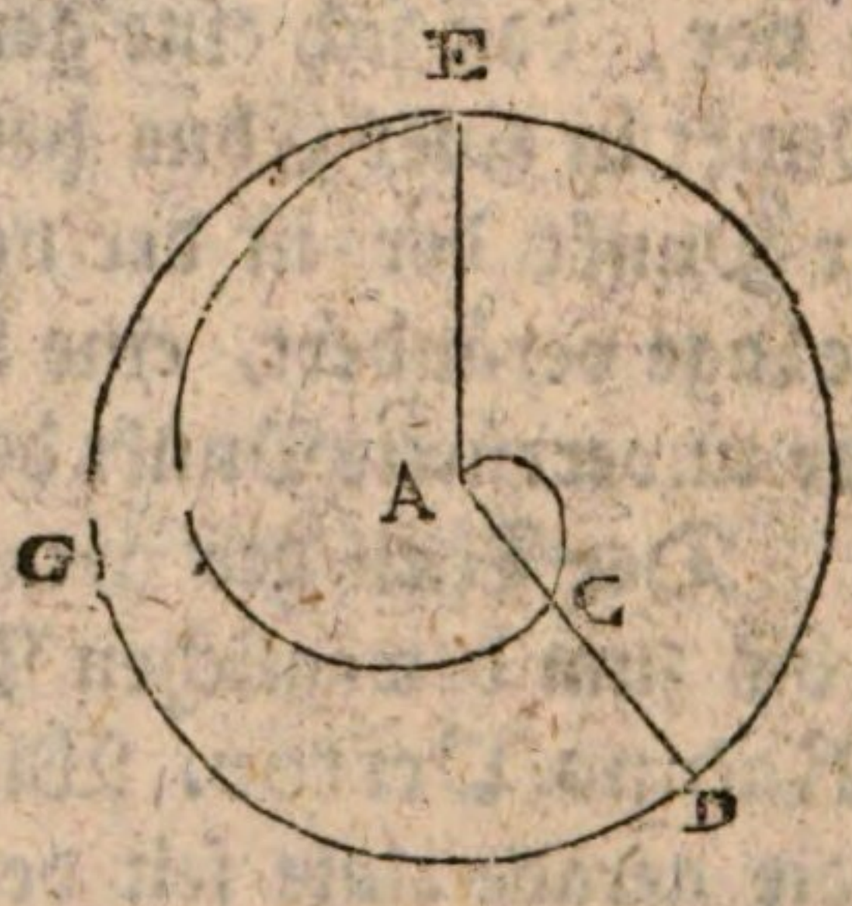
Laßt uns einige Beispiele von solchen krummen Linien anführen.

§. 2.

Es sey A ein unbeweglicher Punkt, um welchen sich die gerade Linie AE herum drehet, welche einen Zirkelbogen



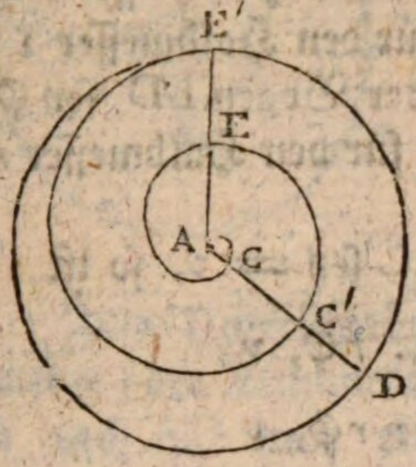
EB mit gleichförmiger Bewegung beschreibet. In der nemlichen Linie AE oder AD befindet sich ein Punkt C, der vom Mittelpunkte A aus, mit gleichförmiger Bewegung, bis zum Umkreise des Zirkels gehe, so daß er denselben irgendwo in B erreiche. So wird die krumme Linie AFCB, welche dieser Punkt C beschreibet, eine Spiral-Linie genannt. Anstatt des Bogens EB kann man auch die ganze



Peripherie EDGE nehmen, so daß der Punkt E den Halbmesser in der nemlichen Zeit durchlaufe, da dieser Halbmesser die ganze Peripherie beschreibet. Auch könnte der

beweg-

bewegliche Punkt den Halbmesser nur einmal durchlaufen, unterdessen daß dieser zwei oder mehrmal die Peripherie beschreibet; in diesem Falle bekäme die Spiral-Linie mehrere Umwendungen.



Z. E. Wenn der Halbmesser zweimal die Peripherie beschreibet, unterdessen daß der bewegliche Punkt ihn einmal durchläuft, so wird erstlich eine Umwendung ACE, hernach aber die zweite EC′E′ beschrieben. Hier ist EE′ die Hälfte von AE′, weil der Punkt C eben so viel Zeit gebrauchet hat von A bis in E, als von E bis in E′ zu kommen.

§. 3.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Spiral-Linie finden.

(Siehe die erste Figur §. 2.)

Auflösung. Da beide Bewegungen wodurch die Spiral-Linie erzeuget wird, einförmig sind, so folget, daß in der Zeit, da der Punkt D einen gewissen Theil, z. E. $\frac{2}{3}$ des Bogens EB durchläuft, der Punkt C zugleich einen ähnlichen Theil, z. E. auch $\frac{2}{3}$ des Halbmessers AD durchlaufen müsse. Folglich ist

EB,

EB, ED :: AD, AC

oder EB, AD :: ED, AC

Es sey der bekannte Halbmesser $AD = r$, der bekannte Bogen EB sey c für den Halbmesser 1 folglich rc für den Halbmesser r. Der Bogen ED sey φ für den Halbmesser 1, folglich $r\varphi$ für den Halbmesser r.

Der Vektor AC sey $= v$, so ist

$$rc, r :: r\varphi, v$$

$$c, 1 :: r\varphi, v$$

daher $v = \frac{r\varphi}{c} = \frac{r}{c} \cdot \varphi$

und da das Verhältniß $\frac{r}{c}$ allemal als bekannt angenommen wird, so mag dasselbe seyn $= n$, dann ist

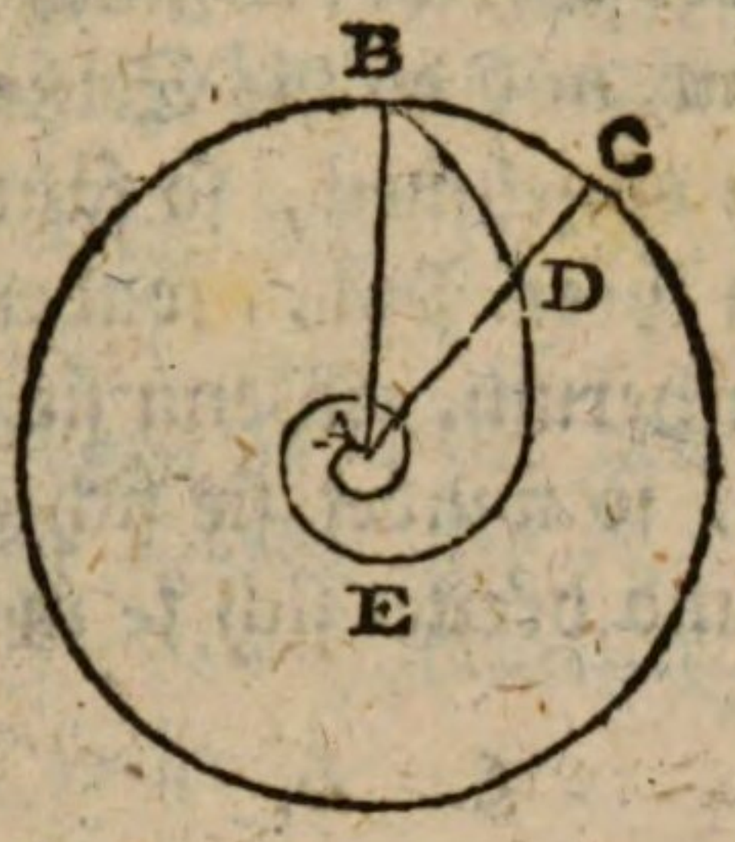
$$v = n\varphi$$

und dieses ist die Gleichung der Spiral-Linie. Nachdem EB kleiner, oder eben so groß, oder größer ist als die Peripherie, so ist das Verhältniß n oder $\frac{r}{c}$ größer oder eben so groß, oder kleiner als das Verhältniß der Peripherie zum Halbmesser.

§. 4.

Es beschreibe der Halbmesser AB oder AC einen Zirkel mit gleichförmiger Bewegung um den Punkt A. In diesem Halbmesser sey ein Punkt D, der sich dem Mittelpunkte A nähere, doch so, daß AD nach einer geometrischen Progression abnehme, so wird die vom Punkte D beschriebene krumme Linie BDE eine logarithmische Spi-

ral-



ral-Linie genannt. Zum Unterschiede wird die vorher erklärte Linie die gemeine oder Archimedische Spiral-Linie genannt. Es kann auch AD nach einer geometrischen Progreßion zunehmen. In diesem Falle fällt die logarithmische Spiral-Linie ausserhalb des Zirkels.

§. 5.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die logarithmische Spiral-Linie finden.

Weil der Bogen BC nach einer arithmetischen Progression zunimmt, und der Vektor AD nach einer geometrischen Progreßion abnimmt, so ist

$$BC = \text{Log. } AD$$

Es sey der Halbmesser $AB = r$. Es sey der Bogen $BC = \varphi$ für den Halbmesser 1, folglich $r\varphi$ für den Halbmesser r. Es sey $AD = v$. Der natürliche Logarithmus von v sey lv, so ist der Logarithmus von $v = m\,lv$ in einem anderen Systeme, welches m zum Modulus hat.

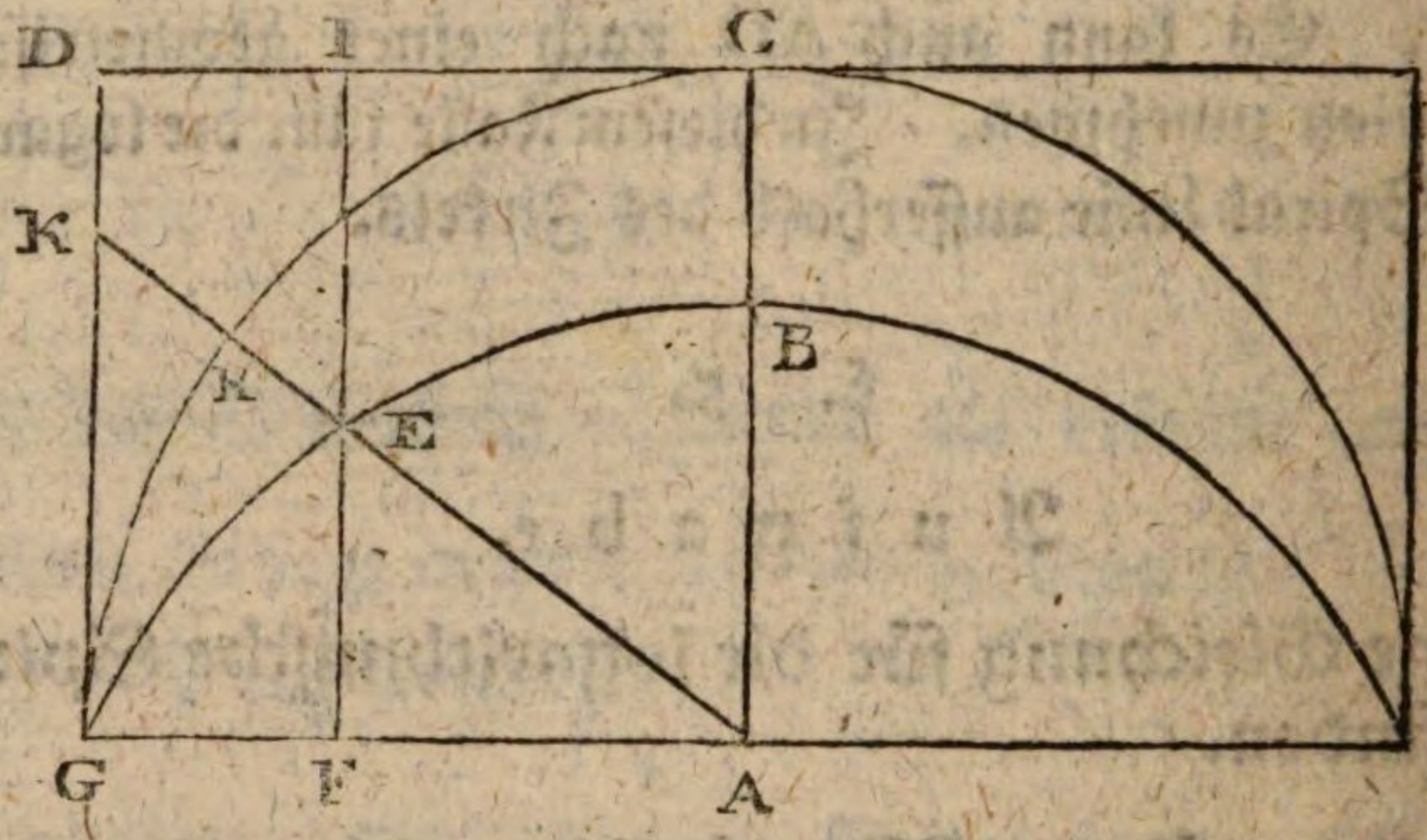
Also wird $r\varphi = m\,lv$
oder $m\,lv = r\varphi$.
Ist $r = 1$ und $m = 1$, so ist bloß
$lv = \varphi$

Zu-

Zusatz. Da der Vektor AD nach einer geometrischen Progression abnimmt, und da die Sätze einer solchen Progreßion ohne Ende abnehmen, so fällt die logarithmische Spiral-Linie nie in ihren Pol, sondern windet sich ohne Ende um denselben herum. Wenn sie ausserhalb des Zirkels fortgesetzt wird, so windet sie sich ebenfalls ohne Ende um ihr herum, und breitet sich je mehr und mehr aus.

§. 6.

Gesetzt, der Halbmesser AH beschreibet einen Viertel-Zirkel GHC. Zu gleicher Zeit beweget sich eine gerade



Linie FI = AH von DG nach CA, so daß sie das Quadrat DA beschreibet, worin der Viertel-Zirkel lieget. Es wird angenommen, daß die Bewegung beiderseits gleichförmig ist. So wird der Punkt E, wo beide bewegliche Linien einander schneiden, eine krumme Linie GEB beschreiben, welche die Dinostratische Quadratrißе (Quadratrix) genannt wird. Wenn man die Bewegung in Gedanken fortsetzet, bis der Halbmesser AH den halben Zirkel und die gerade FI das doppelte Quadrat beschrieben hat, wie in der Figur zu sehen ist, so bekömmt man einen noch deutlicheren Begriff von dem Gange dieser Linie.

§. 7.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Quadratrißе finden.

Auf-

Auflösung. Wegen der Einförmigkeit der Bewegungen, wodurch diese Linie erzeuget wird, ist

$$GH, GC :: GF, GA$$

Es sey der Bogen GH für den Halbmesser $1 = \varphi$, folglich $r\varphi$ für den Halbmesser r. Es sey der Viertel-Zirkel $GC = \frac{1}{2}\pi$ für den Halbmesser 1, folglich $\frac{1}{2}r\pi$ für den Halbmesser r, so ist

$$r\varphi, \tfrac{1}{2}r\pi :: GF, r$$

$$\varphi, \tfrac{1}{2}\pi :: GF, r$$

$$\text{daher} \quad GF = \frac{r\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$$

$$\text{Nun ist} \quad FA = GA - GF = r - \frac{r\varphi}{\frac{1}{2}\pi},$$

$$\text{Ferner ist} \quad FA, AE :: GA, AK$$

Es ist aber AK die Sekante des Bogens GH, und wenn dieselbe für den Halbmesser 1 durch $\beta\varphi$ ausgedrücket wird, so ist sie für den Halbmesser GA oder r, $r\beta\varphi$, also ist

$$FA, AE :: r, r\beta\varphi$$

$$FA, AE :: 1, \beta\varphi$$

Es sey der Vektor $AE = v$, so ist folglich

$$\left(r - \frac{r\varphi}{\frac{1}{2}\pi}\right), v :: 1, \beta\varphi$$

$$\text{daher} \quad v = \left(r - \frac{r\varphi}{\frac{1}{2}\pi}\right)\beta\varphi = r\left(1 - \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}\right)\beta\varphi$$

$$\text{oder, da} \quad \beta\varphi = \frac{1}{S'\varphi}$$

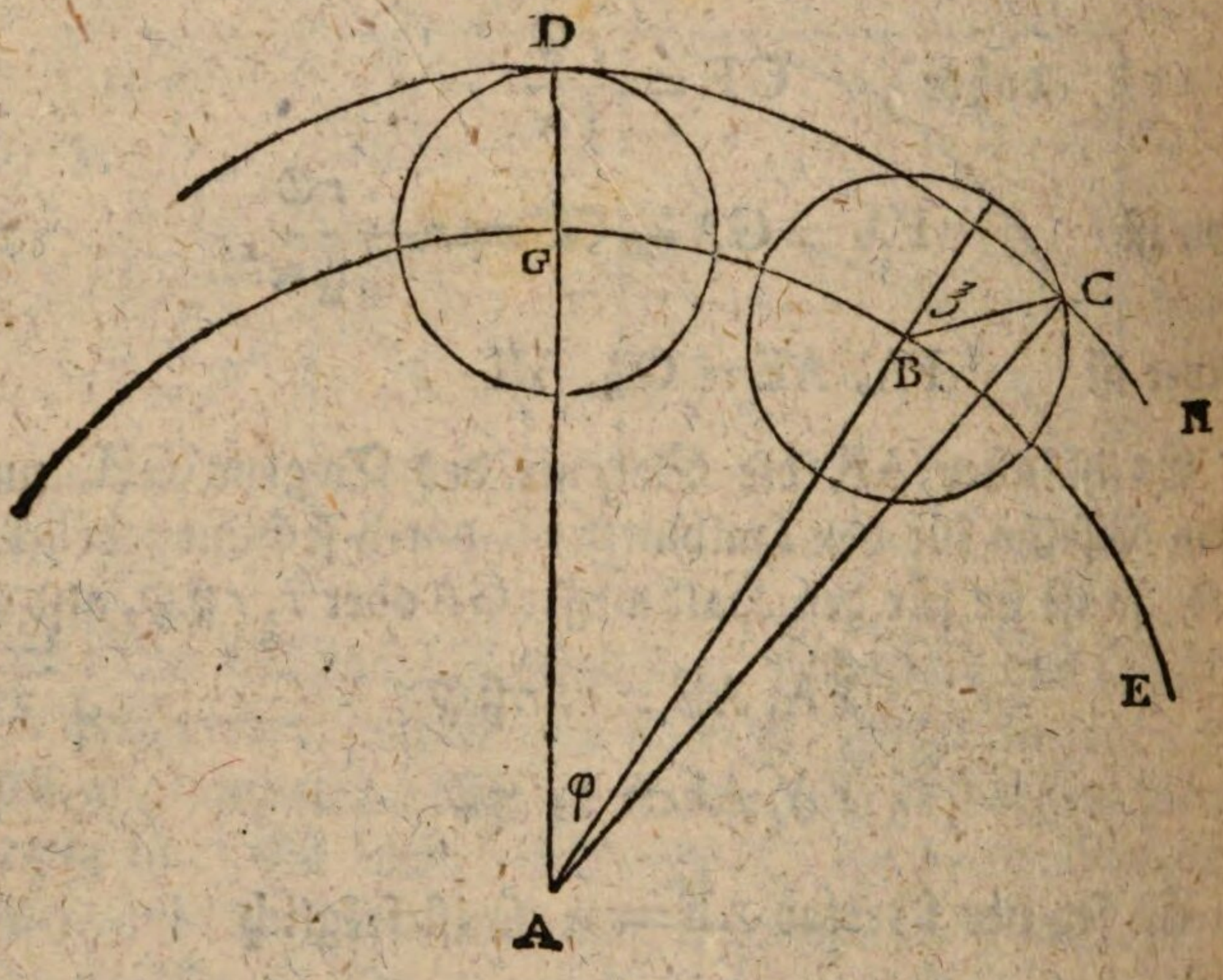
so

so kann man auch sagen

$$v = \frac{r\left(1 - \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}\right)}{S'\varphi} = \frac{r\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)}{\frac{1}{2}\pi . S'\varphi} = \frac{r(\pi - 2\varphi)}{\pi . S'\varphi}$$

§. 8.

Gesetzet, eine gerade Linie AB drehe sich um den Mittelpunkt A und beschreibe den Zirkel GBE mit einförmiger



Bewegung. Es sey in diesem Halbmesser ein Punkt B, um welchem sich ebenfalls mit einförmiger Bewegung eine andere gerade Linie BC herum drehet, unterdessen daß der Punkt B allmälig mit der Linie AB fortrücket. So beschreibet das Ende C der Linie BC eine krumme Linie DCH, welche eine Epizykloïde genannt wird. Es wird angenommen, daß beide Halbmesser AB und BC anfänglich

in

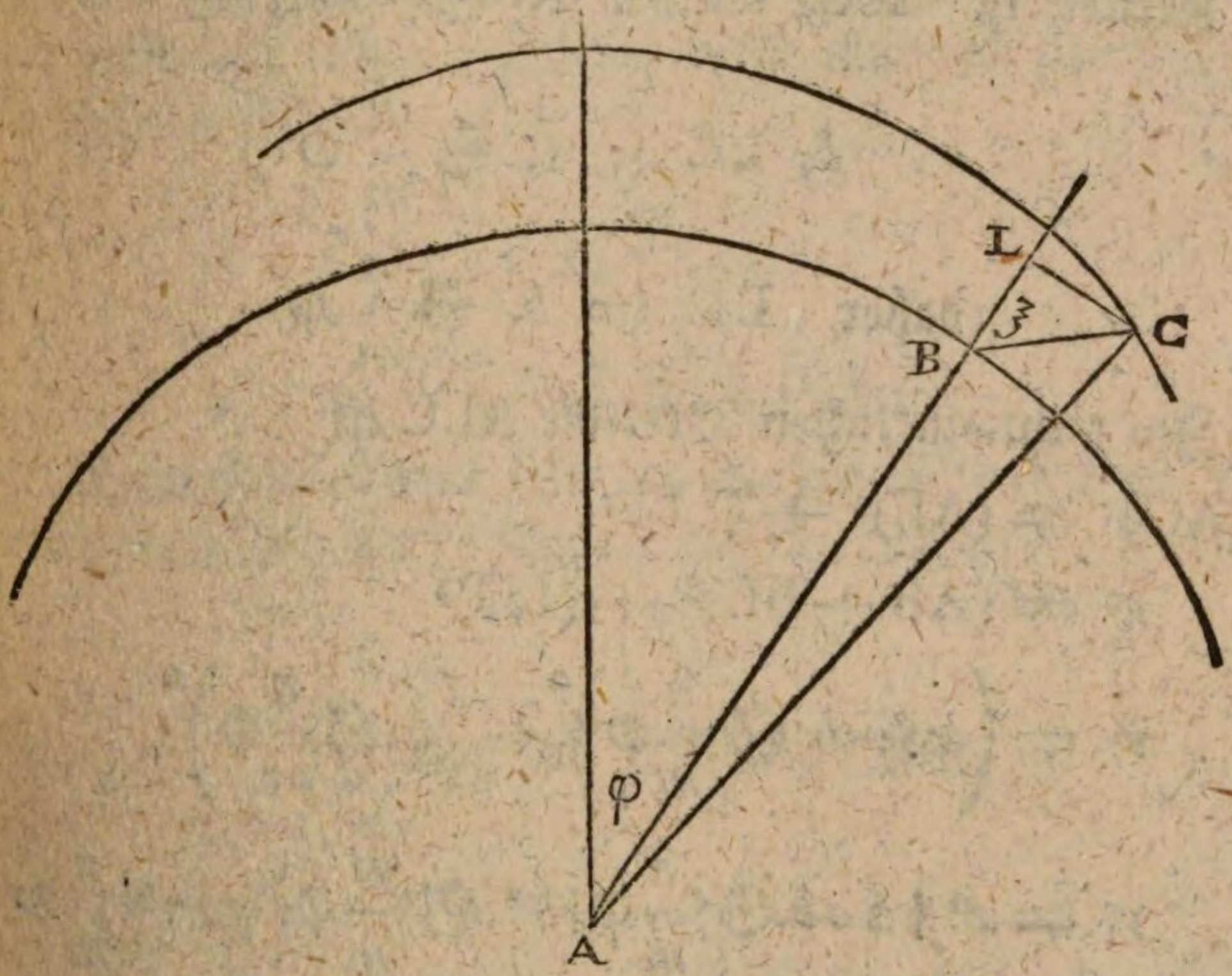
in einer geraden Linie AGD gelegen haben, und daß sie hernach einen Winkel ξ machen der beständig zunimmt. Uebrigens ist AC der Vektor. Der Polar-Winkel sollte eigentlich DAC seyn; da aber der Winkel DAB leichter zu bestimmen ist, so wollen wir ihn anstatt des Polar-Winkels annehmen und ihn φ nennen. Den Zirkel GBE wollen wir den unbeweglichen Zirkel nennen; der andere aber, den der Halbmesser BC um den Punkt B beschreibet, soll der bewegliche Zirkel genannt werden.

§. 9.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Epizykloïde finden.

Auflösung. Es sey $a = AB$ der Halbmesser des unbewegten Zirkels, $b = BC$ der Halbmesser des beweglichen Zirkels. Es sey $AC = y$,



Weil die Halbmesser AB und BC sich einförmig bewegen, so muß das Verhältniß zwischen den Winkel φ und ξ

allemal einerley seyn, nemlich so vielmal geschwinder oder langsamer sich BC drehet als AB, so vielmal größer oder kleiner ist der Winkel ξ als der Winkel φ. Verhalten sich nun die Geschwindigkeiten der Umwendungen wie m zu n, so ist allemal

$$\varphi, \xi :: m\ n$$

$$\text{daher } \xi = \frac{n}{m}\varphi$$

Fälle CL senkrecht auf die verlängerte AB, so ist im rechtwinklichen Dreiecke BCL

$$\text{BC, BL} :: 1, \mathfrak{S}'\xi$$

$$b \text{ BL} :: 1, \mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi$$

$$\text{daher BL} = b.\ \mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi$$

$$\text{Ferner ist BC, LC} :: 1, \mathfrak{S}\xi \text{ oder } \mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi$$

$$b, \text{LC} :: 1; \mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi$$

$$\text{daher LC} = b.\ \mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi$$

Im rechtwinklichen Dreiecke ALC ist

$$(\text{AC})^2 = (\text{AL})^2 + (\text{LC})^2$$

$$y^2 = (\text{AB} + \text{BL})^2 + (\text{LC})^2$$

$$y^2 = \left(a + b.\mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi\right)^2 + \left(b.\mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi\right)^2$$

$$y^2 = a^2 + 2ab.\mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi + b^2.\mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi^2 + b^2\mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi^2$$

$$y^2 = a^2 + 2ab.\mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi + b^2\left(\mathfrak{S}'\frac{n}{m}\varphi^2 + \mathfrak{S}\frac{n}{m}\varphi^2\right)$$

oder,

oder, da $S'\frac{n}{m}\varphi^2 + S\frac{n}{m}\varphi^2 = 1$, so ist

$$y^2 = a^2 + 2ab.S'\frac{n}{m}\varphi + b^2$$

Dieses ist demnach die Gleichung für die Epizykloïde, wo der Vektor AC in einer Funkzion des Winkels φ, oder vielmehr des Bogens, der den Winkel φ mißt und 1 zum Halbmesser hat, ausgedrücket wird.

§. 10.

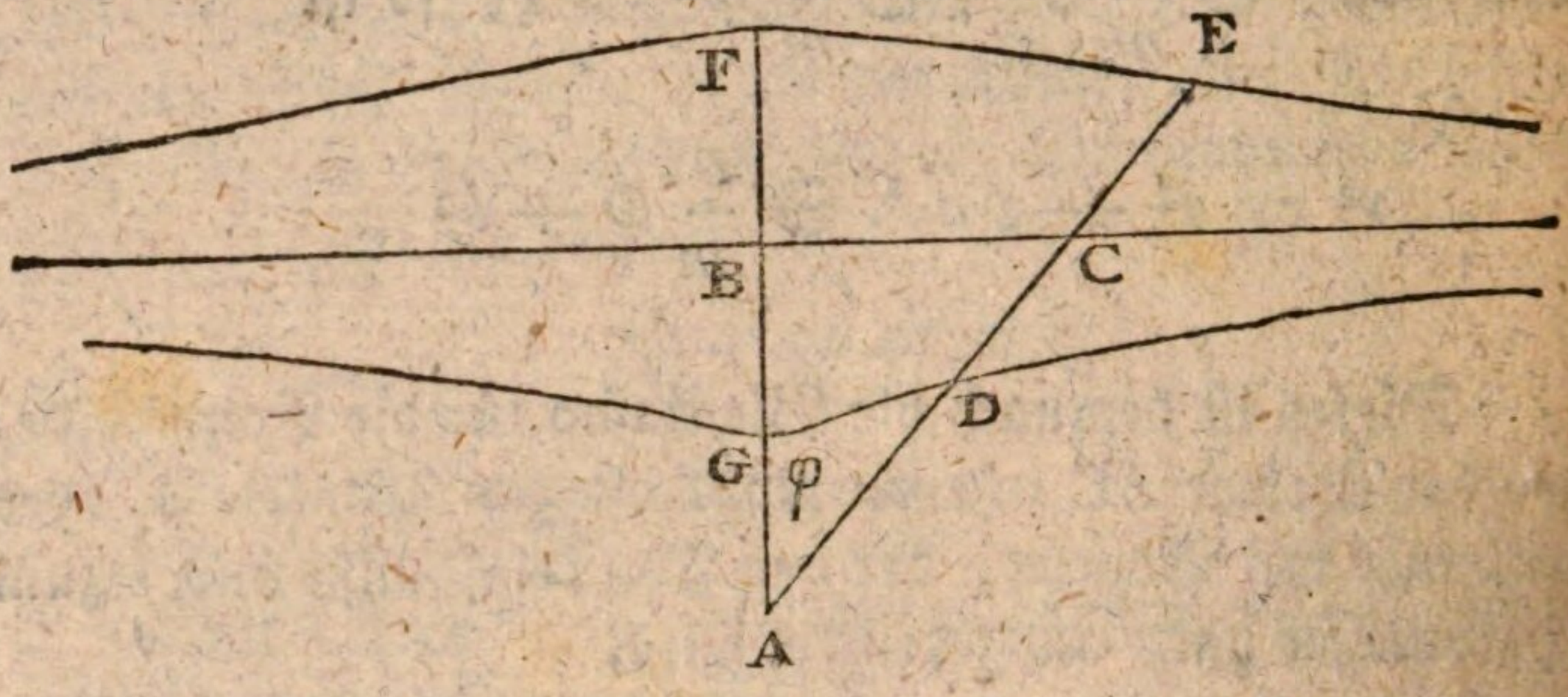
Außer den krummen Linien, deren Gleichungen wir jetzt gefunden haben, giebt es auch einige unter denen krummen Linien, die man durch parallele Koordinaten zu erklären pfleget, deren Natur sich ebenfalls durch eine Gleichung zwischen einem Polar-Winkel und einem Vektor vorstellen läßt. Dieses wird man an den folgenden Beispielen sehen.

§. 11.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Konchoïde finden, wenn man sie als eine Polar-Linie betrachtet.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. In der oberen Konchoïde ist AE = AC + CE und in der unteren ist AD = AC — AD. Es sey CE oder CD = b = BF = BG, so ist überhaupt v = AC ± b. Nun giebt das rechtwinkliche Dreieck ABC

$$AB, AC :: 1, \S\varphi$$

Wenn nun die bekannte Größe AB = a, so ist

$$a, AC :: 1, \S\varphi$$

daher $$AC = a.\S\varphi$$

Also wird $$v = a\,\S\,\varphi \pm b$$

oder, wenn man anstatt der Sekante $\frac{1}{S'}$ schreiben will,

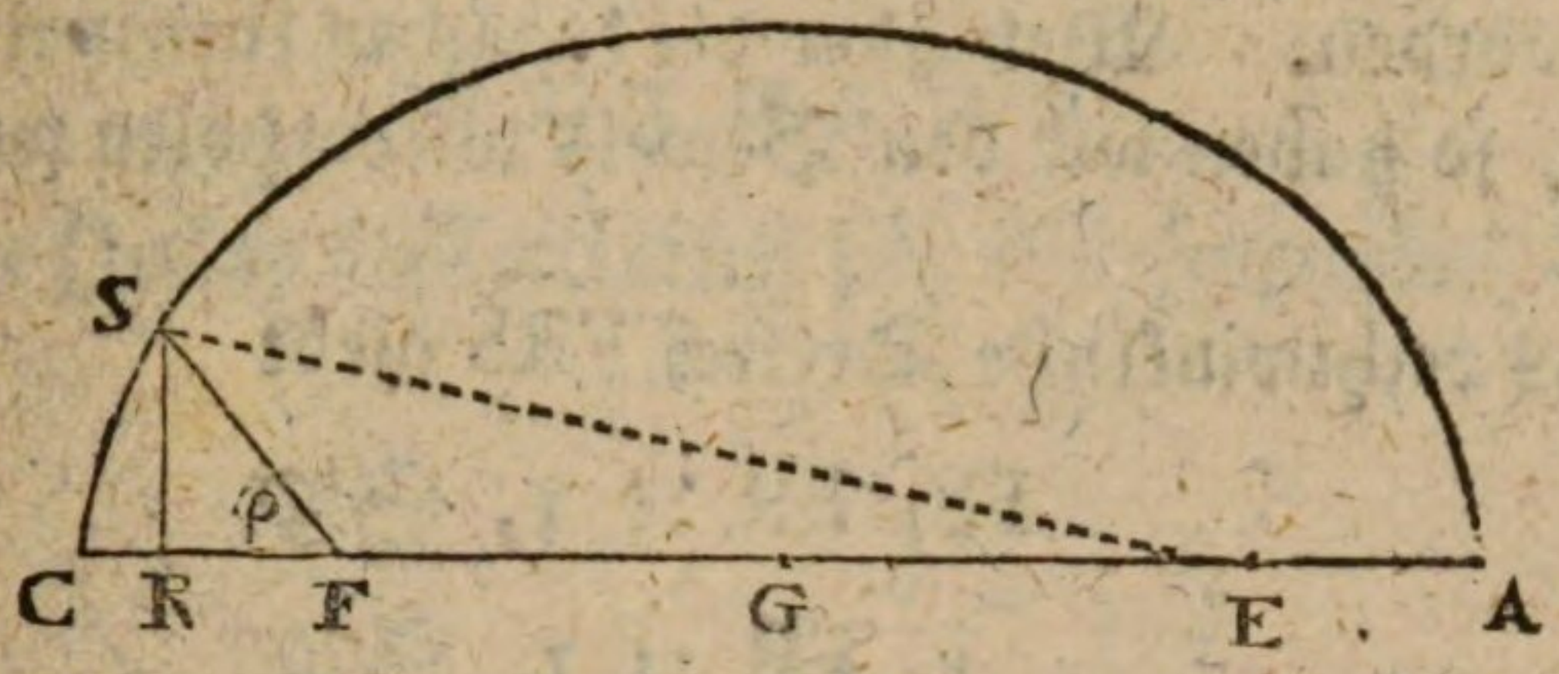
$$v = \frac{a}{S'\varphi} \pm b$$

§. 12.

Aufgabe.

Eine Polar-Gleichung für die Ellipse finden.

Gesetzt, es habe sich der Vektor um den Brennpunkt F gedrehet, so daß er von der Lage CF in die Lage SF gekom-



kommen sey, und den Winkel φ beschrieben habe. Ziehe SE nach dem anderen Brennpunkte E, und SR senkrecht auf die große Axe..

Es sey die halbe Axe $= a = GC = GA$, die Ekzentrizität $= e = GF = GE$. Es sey $GR = x$, so ist $RF = x - e$ und $RE = x + e$. Es sey $SF = y$, so ist $SE = 2a - y$.

Die rechtwinklichen Dreiecke SRE, SRF geben

$$(SE)^2 = (SR)^2 + (RE)^2$$

und $$(SF)^2 = (SR)^2 + (RF)^2$$

oder $$(2a - y)^2 = (SR)^2 + (x + e)^2$$

und $$y^2 = (SR)^2 + (x - e)^2$$

oder $$4a^2 - 4ay + y^2 = (SR)^2 + (x + e)^2$$

und $$y^2 = (SR)^2 + (x - e)^2$$

Subtrahire die zweite Gleichung von der ersten, so ist

$$4a^2 - 4ay = (x + e)^2 - (x - e)^2$$

$$4a^2 - 4ay = x^2 + 2ex + e^2 - x^2 + 2ex - e^2$$

$$4a^2 - 4ay = 4ex$$

$$a^2 - ay = ex$$

$$a^2 - ex = ay$$

$$\frac{a^2 - ex}{a} = y$$

Dieses ist zwar schon oben (I. Hauptst. §. 16.) bewiesen worden. Weil aber die Lage der Linien etwas anders ist, so haben wir den Beweis wiederholen wollen.

Das rechtwinkliche Dreieck FRS giebt

$$FS, FR :: 1, \mathfrak{S}'\varphi$$

$$v, FR :: 1, \mathfrak{S}'\varphi$$

daher $$FR = v . \mathfrak{S}'\varphi$$

Nun ist $$GR = GF + FR$$

$$x = e + v . \mathfrak{S}'\varphi$$

Man setze diesen Werth von x in die Gleichung

$$v = \frac{a^2 - ex}{a}$$

so kömmt $$v = \frac{a^2 - e(e + v\,\mathfrak{S}'\varphi)}{a}$$

$$av = a^2 - e^2 - ev\,\mathfrak{S}'\varphi$$

$$av + ev . \mathfrak{S}'\varphi = a^2 - e^2$$

$$v(a + e\,\mathfrak{S}'\varphi) = a^2 - e^2$$

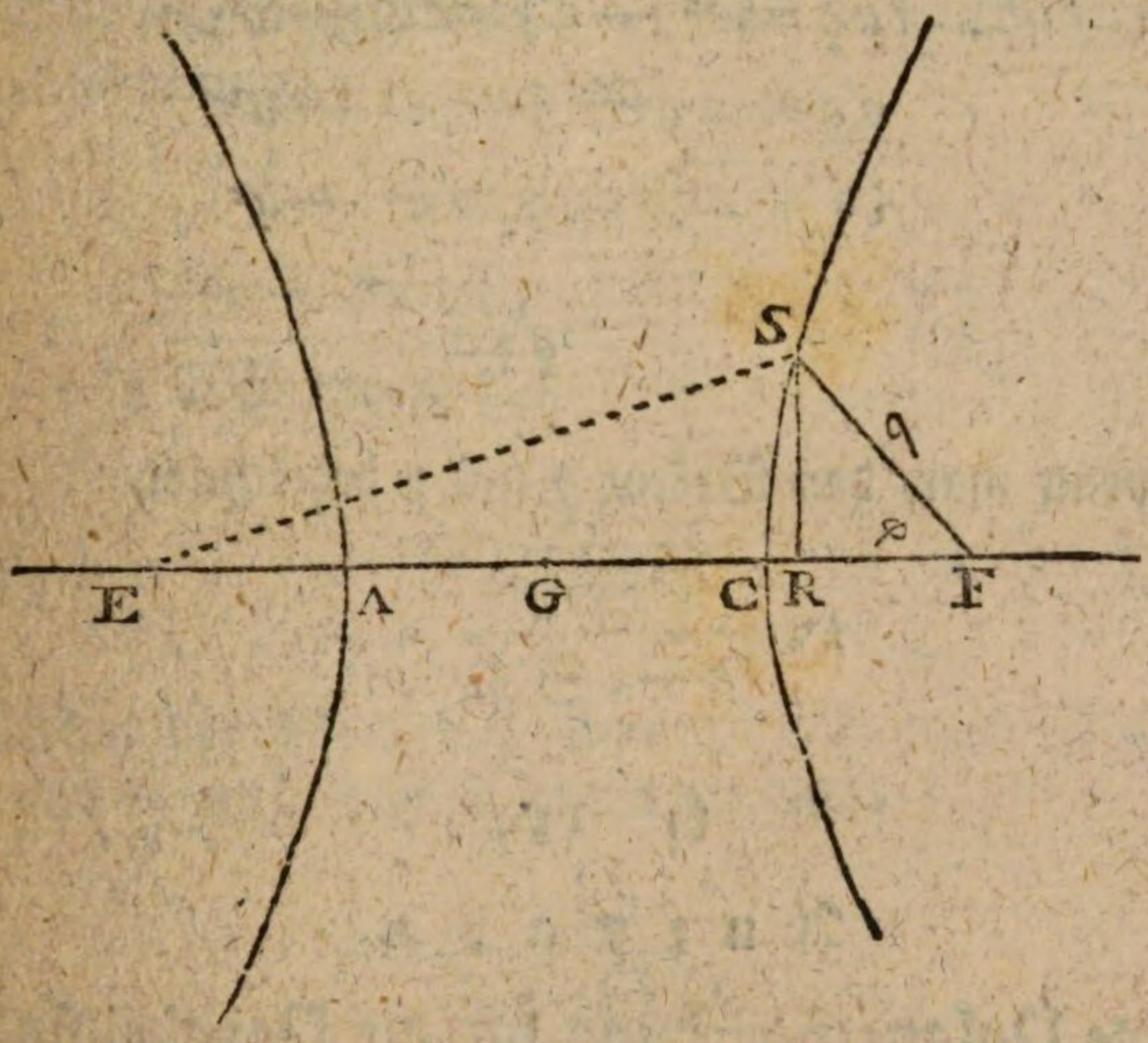
$$v = \frac{a^2 - e^2}{a + e\,\mathfrak{S}'\varphi}$$

Hier ist also a die Hälfte der großen Axe, e ist die Exzentrizität, oder die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte, und φ ist der veränderliche Winkel, den der Vektor FS mit der Haupt-Axe machet, indem er sich um den Brennpunkt F herum drehet.

§. 13.

Aufgabe.

Eine Polar-Gleichung für die Hyperbel finden.



Es sey $GC = GA = a$, $GF = GE = e$, $GR = x$ $FS = q$, so ist am gehörigen Orte (I. Hauptst. §. 25.) bewiesen worden, daß

$$q = \frac{ex}{a} - a = \frac{ex - a^2}{a}$$

Nun ist im rechtwinklichen Dreiecke FRS,

FS, FR :: 1, S'φ

q, FR :: 1, S'φ

daher FR = q. S'φ

Nun ist $GR = x = GF - FR = e - q\mathfrak{S}'\varphi$, folglich wird

$$q = \frac{e(e - q\mathfrak{S}'\varphi) - a^2}{a}$$

$$aq = e(e - q\mathfrak{S}'\varphi) - a^2$$

$$aq = e^2 - eq\mathfrak{S}'\varphi - a^2$$

$$aq + eq\mathfrak{S}'\varphi = e^2 - a^2$$

$$(a + e\mathfrak{S}'\varphi)q = e^2 - a^2$$

$$q = \frac{e^2 - a^2}{a + e\mathfrak{S}'\varphi}$$

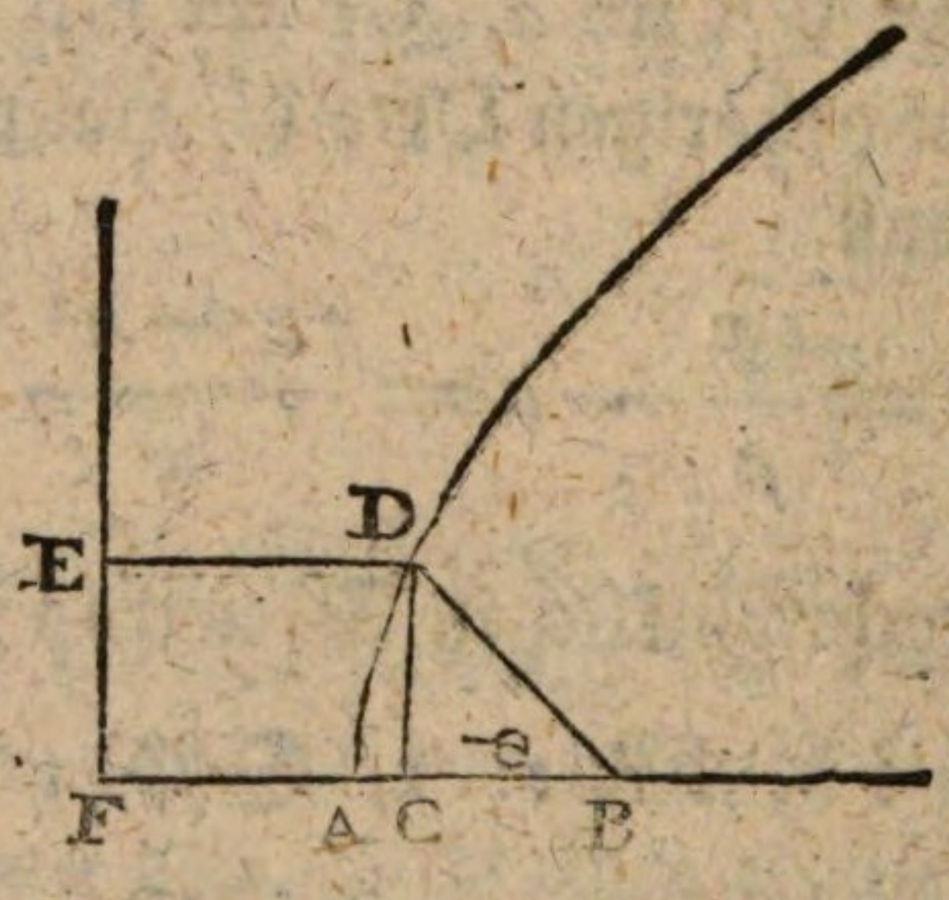
oder, wenn man den Vektor q mit v bezeichnet,

$$v = \frac{e^2 - a^2}{a + e\mathfrak{S}'\varphi}$$

§. 14.

Aufgabe.

Eine Polar-Gleichung für die Parabel finden.



Auflösung. Es sey $BD = v$, $BC = z$, der Parameter $= p$, vermöge der Natur der Parabel ist

$$v = BD = DE = FC = FB - BC = \tfrac{1}{2}p - z$$

wenn

wenn nemlich FE die Direktrize der Parabel ist. Nun ist

$$BD, BC :: 1, S'\varphi$$

$$v, z :: 1, S'\varphi$$

$$z = v. S'\varphi$$

Man setze diesen Werth von z in die Gleichung $v = \frac{1}{2}p - z$, so kömmt

$$v = \tfrac{1}{2}p - v S'\varphi$$

$$v + v S'\varphi = \tfrac{1}{2}p$$

$$v(1 + S'\varphi) = \tfrac{1}{2}p$$

$$v = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + S'\varphi}$$

Wenn der Winkel φ stumpf ist, so wird $S'\varphi$ negativ, und es wird folglich in diesem Falle

$$v = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - S'\varphi}$$

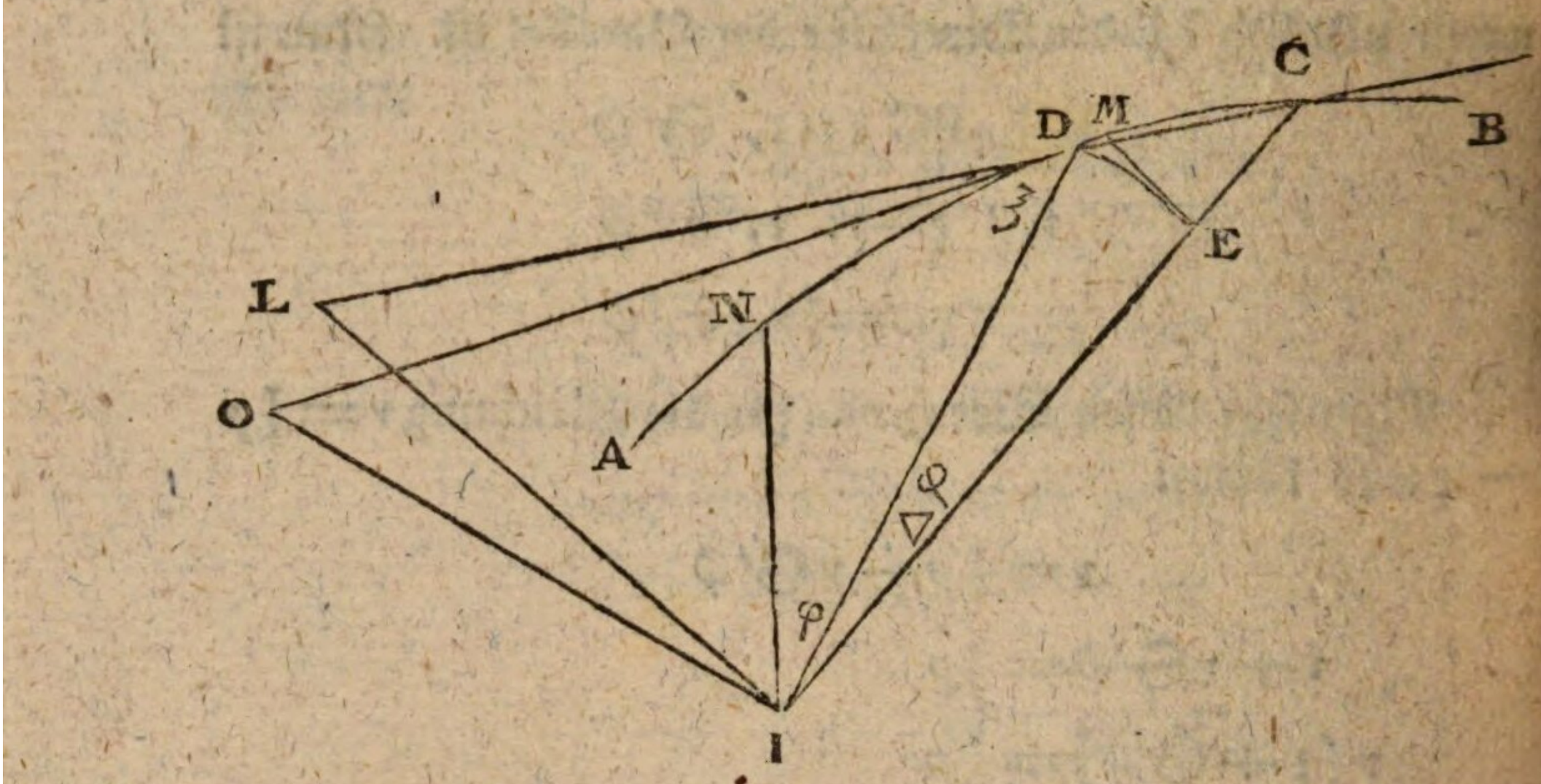
§. 15.

Aufgabe.

Die Tangente für jeden Punkt einer Polar-Linie ziehen.

Auflösung.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey die krumme Linie AB um den Pol I beschrieben, vermittelst einer beweglichen geraden Linie deren Lage anfänglich in IN gewesen ist. Es sey die Tangente DO für einen Punkt D derselben zu ziehen. Ziehe den Vektor DI, und noch einen anderen CI in einiger Entfernung. Aus dem Mittelpunkte I beschreibe den Zirkelbogen DE. Durch die Punkte C und D ziehe eine gerade Linie CDL. Errichte IO senkrecht auf DI und IL senkrecht auf CI, so werden diese beiden Linien die vorigen in O und L schneiden. Aus E errichte EM senkrecht auf CI.

Es sey $DI = v$, so ist $CE = \Delta v$. Es sey φ die Zahl die den Bogen ausdrücket, welcher den Winkel NID mißt, wenn der Halbmesser $= 1$, so ist $\Delta\varphi$ die Zahl die den Bogen ausdrücket, der für den Halbmesser 1 den Winkel DIE oder DIC mißt. Folglich wird für den Halbmesser v, der Bogen $DE = v . \Delta\varphi$. Es ist DI der Vektor. Der Winkel ODI den die Tangente mit dem Vektor machet sey $= \xi$, oder vielmehr es sey ξ der Bogen der diesen Winkel mißt, wenn der Halbmesser $= 1$.,

Die ähnlichen Dreiecke CEM, CIL geben

CE, EM :: CI, IL

Man

Man nehme nun an, der Vektor CI nähere sich je mehr und mehr dem Vektor DI, so nähert sich EM je mehr und mehr dem Bogen ED oder $v\triangle\varphi$, CI der DI und IL der IO. Es ist aber DI, IO :: 1, $\mathfrak{T}\xi$, oder v, IO :: 1, $\mathfrak{T}\xi$ daher IO $= v\,\mathfrak{T}\xi$. Folglich nähert sich IL dem Werthe $v\,\mathfrak{T}\xi$. Setze man alle diese Gränzen in die vorige Proporzion, so ist beinahe

CE, ED :: DI, IO

oder CE, ED :: v, $v\mathfrak{T}\xi$

CE, ED :: 1, $\mathfrak{T}\xi$

$\triangle v$, $v\triangle\varphi$ :: 1, $\mathfrak{T}\xi$

oder, wenn $\triangle v$ und $\triangle\varphi$ sehr klein werden

∂v, $v\partial\varphi$ :: 1, $\mathfrak{T}\xi$

$$\text{daher } \mathfrak{T}\xi = \frac{v\,\partial\varphi}{\partial v} = v.\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

welche Gleichung wahr wird, wenn $\partial\varphi$ und ∂v verschwinden, und also die Tangente von ξ für den Halbmesser 1 giebt, wenn man, nach den gewöhnlichen Regeln der Differenzial-Rechnung, das Verhältniß $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ in einer Funkzion von v ausdrücket.

Exempel. I. In der archimedischen Spiral-Linie ist

$$v = n\varphi$$

$$\text{daher } \partial v = n\,\partial\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{n}$$

$$v.\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{v}{n} = \mathfrak{T}\xi$$

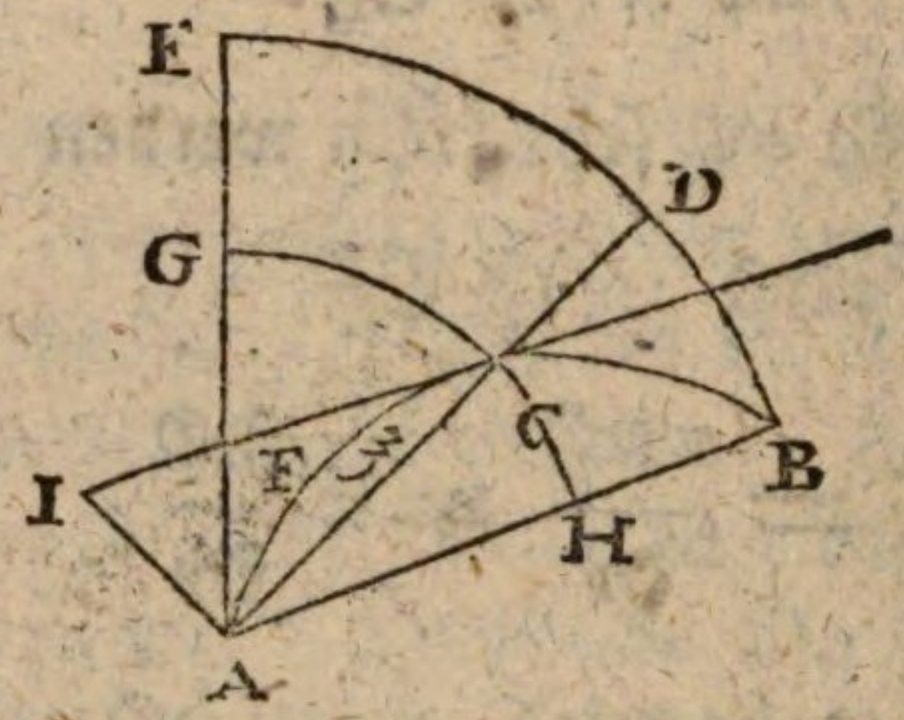
Da hier $\mathfrak{T}\xi$ und n bloße Zahlen sind, so läßt sich der Winkel ξ nicht gut geometrisch konstruiren, deswegen sage man weiter

$$\text{da } \mathfrak{T}\xi = \frac{v}{n} = v : \frac{r}{c} = \frac{cv}{r} \quad (\S.\ 3)$$

$$\text{so ist } v\mathfrak{T}\xi = \frac{cv.v}{r}$$

$$\text{oder } r,\ v :: cv,\ v\mathfrak{T}\xi$$

Hier ist der gegebene Halbmesser



AE oder AD oder AB $= r$; v ist der Vektor AC der Spiral-Linie AFCB für den Punkt C. Da c den Bogen EB für den Halbmesser 1 vorstellet, so stellet cv den ähnlichen Bogen GH für den Halbmesser $v =$ AC vor. Da $\mathfrak{T}\xi$ die Tangente des Winkels ξ für den Halbmesser 1 vorstellet, so stellet $v\mathfrak{T}\xi$ die Tangente AI des nemlichen Winkels ξ für den Halbmesser AC oder v vor.

Man errichte demnach AI senkrecht auf dem Vektor AC, und mache

$$\text{DA, AC :: GH, AI}$$

Man ziehe IC, so ist diese IC die Tangente der Spiral-Linie für den Punkt C.

Man siehet leicht ein, daß, wenn EB ein ganzer Zirkel ist, alsdenn auch GH ein ganzer Zirkel werde.

Exem-

Exempel. II. In der logarithmischen Spiral-Linie ist

$$m \mathfrak{l} v = r\varphi$$

$$\text{folglich } \frac{m\,\mathfrak{d}v}{v} = r\,\mathfrak{d}\varphi$$

$$m\,\mathfrak{d}v = v r\,\mathfrak{d}\varphi$$

$$\frac{m}{r} = \frac{v\,\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d}v}$$

$$\mathfrak{T}\xi = \frac{m}{r} = \frac{v\,\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d}v}$$

daher man siehet, daß der Winkel den die Tangente dieser krummen Linie mit dem Vektor machet, eine unveränderliche Größe ist. Wird $r = m$ so ist $\mathfrak{T}\xi = 1$, folglich ist ξ alsdenn ein Winkel von 45 Graden, welches geschiehet, wenn die Logarithmen in einem Systeme genommen werden, wo der Modulus dem Halbmesser des Zirkels gleich ist.

Exempel III. In der Quadratrisse ist (§. 7)

$$v = \frac{r\left(1 - \frac{\varphi}{\frac{1}{2}\pi}\right)}{\mathfrak{S}\varphi}$$

oder

$$v.\,\mathfrak{S}'\varphi = r - \frac{r\varphi}{\frac{1}{2}\pi}$$

oder $\frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}'\varphi = \frac{1}{2}\pi.r - r\varphi$

daher ist $\frac{1}{2}\pi.\mathfrak{S}'\varphi.\mathfrak{d}v - \frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}\varphi.\mathfrak{d}\varphi = -r\,\mathfrak{d}\varphi$

$$\frac{1}{2}\pi.\mathfrak{S}'\varphi.\mathfrak{d}v = \frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}\varphi.\mathfrak{d}\varphi - r\,\mathfrak{d}\varphi$$

$$\frac{1}{2}\pi.\mathfrak{S}\varphi'.\mathfrak{d}v = \left(\frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}\varphi - r\right)\mathfrak{d}\varphi$$

$$\frac{\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d}v} = \frac{\frac{1}{2}\pi.\mathfrak{S}'\varphi}{\frac{1}{2}\pi\,v.\mathfrak{S}\varphi - r}$$

$$\mathfrak{T}\xi = v.\frac{\mathfrak{d}\varphi}{\mathfrak{d}v} = \frac{\frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}'\varphi}{\frac{1}{2}\pi.v.\mathfrak{S}\varphi - r} = \frac{v.\mathfrak{S}'\varphi}{v\mathfrak{S}\varphi - \frac{r}{\frac{1}{2}\pi}}$$

Will

Will man den Winkel ξ geometrisch konstruiren, so multiplizire man noch mit ν, dann ist

$$\nu \mathfrak{T} \xi = \frac{\nu . \nu \mathfrak{S}' \varphi}{\nu \mathfrak{S} \varphi - \frac{r}{\frac{1}{2}\pi}}$$

Nun verhält sich der Halbmesser AH zum Viertelzirkel GC, wie 1 zu $\frac{1}{2}\pi$, oder

$$r, \mathrm{GC} :: 1, \tfrac{1}{2}\pi \quad (\S 6 \text{ und } 7)$$

daher ist $\frac{1}{2}\pi = \frac{\mathrm{GC}}{r}$

und $\frac{r}{\frac{1}{2}\pi} = r : \frac{\mathrm{GC}}{r} = \frac{r^2}{\mathrm{GC}}$

Also ist $$\nu \mathfrak{T} \xi = \frac{\nu . \nu \mathfrak{S}' \varphi}{\nu \mathfrak{S} \varphi - \frac{r^2}{\mathrm{GC}}}$$

oder $$\nu \mathfrak{T} \xi = - \frac{\nu . \nu \mathfrak{S}' \varphi}{\frac{r^2}{\mathrm{GC}} - \nu \mathfrak{S} \varphi}$$

das heißt $\left(\frac{r^2}{\mathrm{GC}} - \nu \mathfrak{S} \varphi\right), \nu \mathfrak{S}' \varphi :: \nu, -\nu \mathfrak{T} \xi$

Diese Proporzion ist leicht zu konstruiren. Es ist $\frac{r^2}{\mathrm{GC}}$ die dritte Proporzional-Linie zu GC und r, $\nu \mathfrak{S} \varphi$ ist der Sinus des Polarwinkels für den Halbmesser ν, $\nu \mathfrak{S}' \varphi$ ist der Kosinus des nemlichen Winkels, und $\nu \mathfrak{T} \xi$ ist die Tangente des Winkels ξ für den Halbmesser ν, folglich ist $- \nu \mathfrak{T} \xi$ die Tangente des Supplements.

Exem-

Exempel IV. In der Ellipse ist (§ 12.)

$$v = \frac{a^2 - e^2}{a + e\,\mathfrak{S}'\varphi}$$

oder $a v + e v \mathfrak{S}'\varphi = a^2 - e^2$

folglich $a\,\delta v + e.\mathfrak{S}'\varphi\,\delta v - ev.\mathfrak{S}\varphi.\delta\varphi = o$

$$ev.\mathfrak{S}\varphi.\delta\varphi = e.\mathfrak{S}'\varphi.\delta v + a\,\delta v$$

$$ev.\mathfrak{S}\varphi.\delta\varphi = (e\mathfrak{S}'\varphi + a)\,\delta v$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta v} = \frac{e\mathfrak{S}'\varphi + a}{ev.\mathfrak{S}\varphi}$$

$$\mathfrak{T}\xi = v\frac{\delta\varphi}{\delta v} = \frac{e\mathfrak{S}'\varphi + a}{e\mathfrak{S}\varphi}$$

Wollte man diesen Werth von $\mathfrak{T}\xi$ geometrisch konstruiren, so könnte man mit v multipliziren, dann wäre

$$v\mathfrak{T}\xi = \frac{e.v\mathfrak{S}'\varphi + av}{e\mathfrak{S}\varphi}$$

$$v\mathfrak{T}\xi = \frac{e.v\mathfrak{S}'\varphi}{e\mathfrak{S}\varphi} + \frac{av}{e\mathfrak{S}\varphi}$$

$$v\mathfrak{T}\xi = v.\frac{\mathfrak{S}'\varphi}{\mathfrak{S}\varphi} + \frac{av}{e}.\frac{1}{\mathfrak{S}\varphi}$$

Nun ist $\frac{\mathfrak{S}'\varphi}{\mathfrak{S}_\varphi} = \mathfrak{T}\varphi$ und $\frac{1}{\mathfrak{S}\varphi} = \mathfrak{ß}'\varphi$, also ist

$$v\mathfrak{T}\xi = v\mathfrak{T}'_\varphi + \frac{a}{e}.v\mathfrak{ß}'_\varphi$$

Wenn man also v zum Halbmesser nimmt, so ist die Tangente des Winkels ξ, gleich der Kotangente des Winkels

kels φ, nebst der dritten Proporzional-Linie zu e, a und der Kosekante des Winkels φ.

Exempel V. In der Hyperbel ist

$$y = \frac{e^2 - a^2}{a + e\mathfrak{S}'\varphi}$$

daher $av + ev\mathfrak{S}\varphi = e^2 - a^2$

$$a\partial v + e.\mathfrak{S}'\varphi.\partial v - ev.\mathfrak{S}\varphi.\partial\varphi = 0$$

$$(a + e\mathfrak{S}'\varphi)\partial v = ev.\mathfrak{S}\varphi.\partial\varphi$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{a + e\mathfrak{S}'\varphi}{ev\mathfrak{S}\varphi}$$

$$\mathfrak{T}\xi = v\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{a + e\mathfrak{S}'\varphi}{e\mathfrak{S}\varphi}$$

Dieser Werth von $\mathfrak{T}\xi$ kann wie bei der Elliipse konstruiret werden.

Exempel IV. In der Parabel ist

$$v = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \mathfrak{S}'\varphi}$$

$$(1 + \mathfrak{S}'\varphi)v = \tfrac{1}{2}p$$

$$(1 + \mathfrak{S}'\varphi)\partial v - v\mathfrak{S}\varphi.\partial\varphi = 0$$

$$v\mathfrak{S}\varphi.\partial\varphi = (1 + \mathfrak{S}'\varphi)\partial v$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1 + \mathfrak{S}'\varphi}{v\mathfrak{S}\varphi}$$

$$\mathfrak{T}\xi = v\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1 + \mathfrak{S}'\varphi}{\mathfrak{S}\varphi}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{S}\varphi} + \frac{\mathfrak{S}'\varphi}{\mathfrak{S}\varphi}$$

Will

Will man eine geometrische Konstrukzion haben, so multiplizire man mit ν. Dann ist

$$\nu\mathfrak{T}\xi = \nu\beta'\varphi + \nu\mathfrak{T}'\varphi$$

das heißt, die Tangente des Winkels ξ für den Halbmesser ν, ist gleich der Kosekante nebst der Kotangente des Winkels φ für den nemlichen Halbmesser.

§. 16.

Wir übergehen verschiedene Aufgaben, welche man in Betreff der Linien, die um einen Pol beschrieben sind, vortragen könnte, und merken nur noch an, daß die Epizykloïde nicht wie die übrigen Linien dieser Art behandelt werden könne, weil ihre Gleichung nicht so eingerichtet ist, daß der Polar-Winkel von dem Vektor begränzet sey. Es haben sich verschiedene große Geometer geübet, die Eigenschaften der Epizykloïde entweder bloß geometrisch oder analytisch zu entwickeln. Ihre sinnreichen Methoden gehören aber nicht in ein Buch wie dieses, das nur für Anfänger in der höheren Geometrie bestimmet ist.

Siebenzehntes Hauptstück.

Von doppelt gekrümmten Linien, und von krummen Flächen.

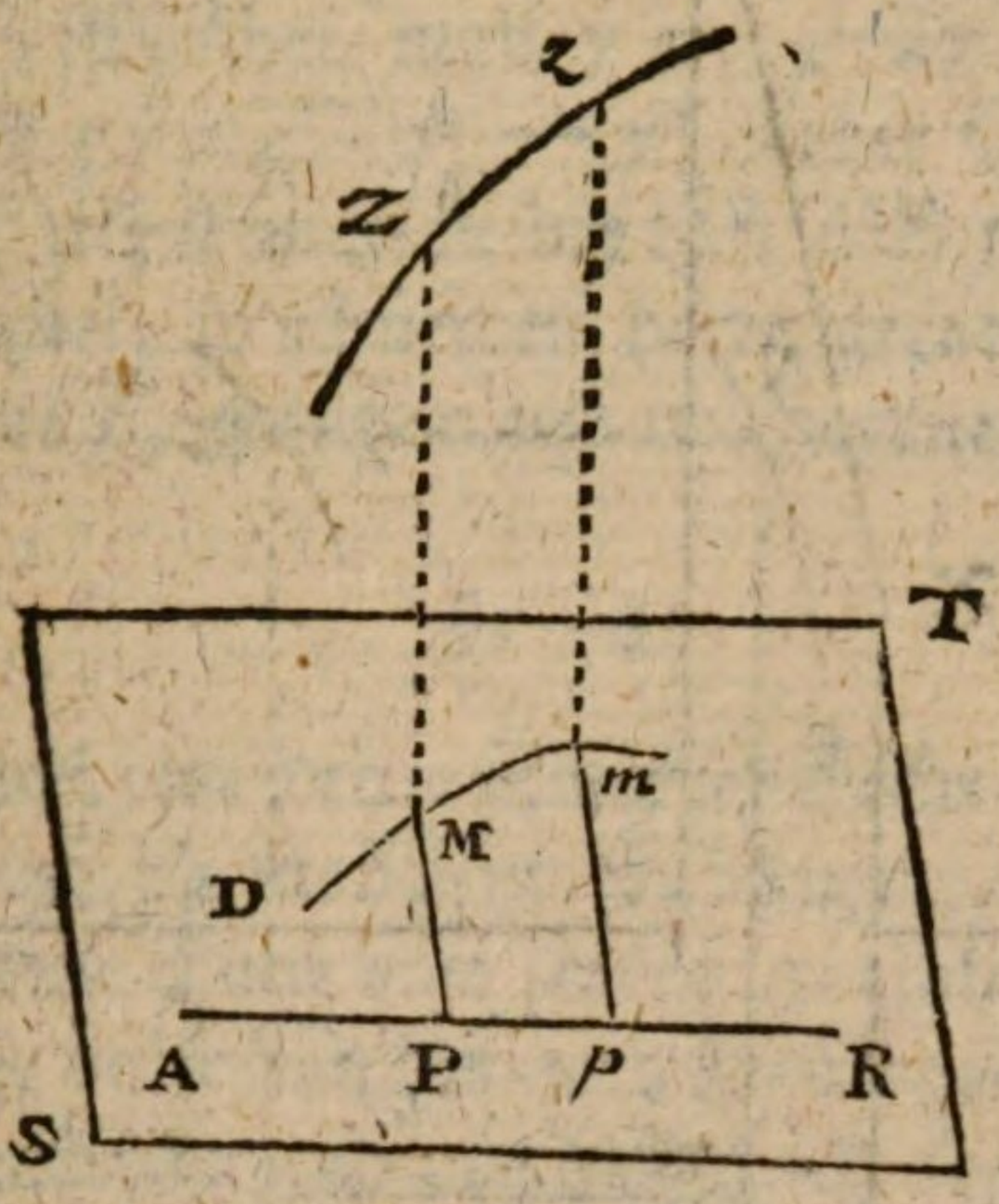
§. 1.

Eine doppelt gekrümmte Linie ist diejenige, welche nicht in einer Ebne lieget, oder welche auf keine Art auf eine Ebne angeleget werden kann, so daß alle ihrer Theile an derselben genau anschließen. Jede krumme Linie hingegen die in einer Ebne lieget oder liegen kann, ist nur einfach gekrümmt. Von dieser Art sind alle Linien die wir bisher betrachtet haben. Unser Werk würde unvollständig seyn, wenn wir den Anfänger mit den doppelt gekrümmten Linien ganz unbekannt seyn liessen. Und da die algebraïschen Ausdrücke solcher Linien mit denen verwandt sind, wodurch die krummeu Flächen erkläret werden, so wollen wir diese beiden Gegenstände in gegenwärtigem Hauptstücke betrachten.

(Siehe die folgende Figur.)

§. 2.

§. 2.

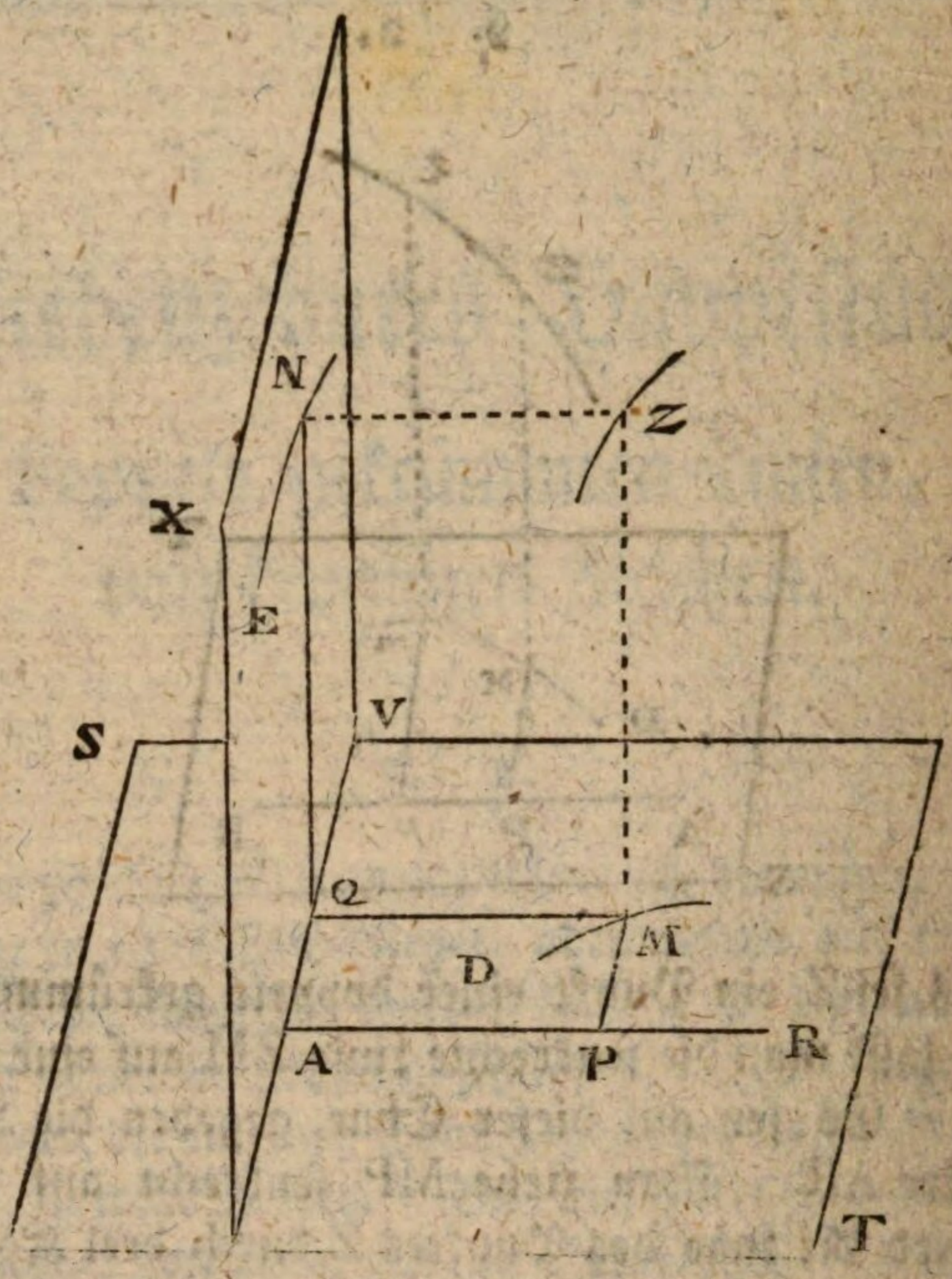


Es sei Z ein Punkt einer doppelt gekrümmten Linie. Aus Z lasse man die senkrechte Linie ZM auf eine Ebne ST fallen. Es sey auf dieser Ebne gegeben die Richtlinie oder Axe AR. Man ziehe MP senkrecht auf diese AR. So wird die Lage des Punktes Z durch drei Koordinaten AP ($= x$), PM $= y$) und MZ ($= z$) ausgedrücket. Werden nun unendlich viel solche Koordinaten gezogen, als A*p*, *pm*, *mz* und findet zwischen x, y, desgleichen zwischen y und z allemal die nemliche Gleichung Statt, so drücken beide Gleichungen die Natur der doppelt gekrümmten Linie aus.

Die Punkte M, *m* liegen auf der Ebne in einer einfach gekrümmten Linie DM, welche die Projekzion, oder der **Entwurf** der doppelt gekrümmten Linie genannt wird.

§. 3.

Auf eine ähnliche Art kann man eine zweite Projekzion der doppelt gekrümmten Linie erhalten.



Senkrecht auf der Ebne ST errichte man eine andere Ebne VX, so daß der Durchschnitt VA durch den Ursprung A gehe und auf AR senkrecht sei. Vom Punkte Z fälle man eine senkrechte Linie ZN auf die Ebne VX. Verrichtet man dieses mit unendlich vielen Punkten wie Z, so entstehet wiederum auf der Ebne VX eine Projekzion EN der doppelt gekrümmten Linie. Vom Punkte N fälle NQ senkrecht auf AV, so wird $NQ = ZM = z$, und $AQ = PM = y$.

Gesezt nun, es sey die Natur beider Projekzionen bekannt, so hat man zwei Gleichungen, die erste zwischen AB ($= x$) und PM ($= y$), die andere aber zwischen AQ ($= y$), und QN ($= z$), und diese beiden Gleichungen geben, wie vorher gesagt, die Natur der doppelt gekrümmten Linie zu erkennen.

Es sey z. E. DM ein Stück einer Parabel, worinn $y^2 = ax$, und es sei EN ein Zirkelbogen, so daß $z^2 = a^2 - y^2$. Machet man $y = \sqrt{ax}$ oder $PM = \sqrt{(a.\,AP)}$, und $z = \sqrt{(a^2 - y^2)}$ oder $QN = \sqrt{(a^2 - AQ^2)}$, und ziehet man in der Luft MZ mit QN und NZ mit QM parallel, so schneiden beide geraden Linien einander im Punkte Z, welcher also vollkommen bestimmet ist.

§. 4.

Wenn man eine dritte Ebne senkrecht auf ST und VX errichtet, so daß sie die ST in AR schneide, wenn man aus Z auf diese dritte Ebne eine senkrechte Linie fället, und ferner vom Fuße derselben bis nach P eine gerade Linie ziehet, die auf AP senkrecht und der MZ gleich seyn wird; so bekömmt man eine dritte Projekzion des Punktes z und auf gleiche Art der ganzen doppelt gekrümmten Linie. Diese Projekzion wird ausgedrücket durch eine Gleichung zwischen x und z, welche aus beiden schon vorhandenen Gleichungen gezogen wird. Z. E. Wenn $y^2 = ax$, und $z^2 = a^2 - y^2$, so ist $z^2 = a^2 - ax$, oder $z^2 = a(a - x)$ welch Gleichung ebenfalls eine Parabel andeutet, denn es sey $a - x = u$, so ist $z^2 = au$ oder $z = \sqrt{(au)}$.

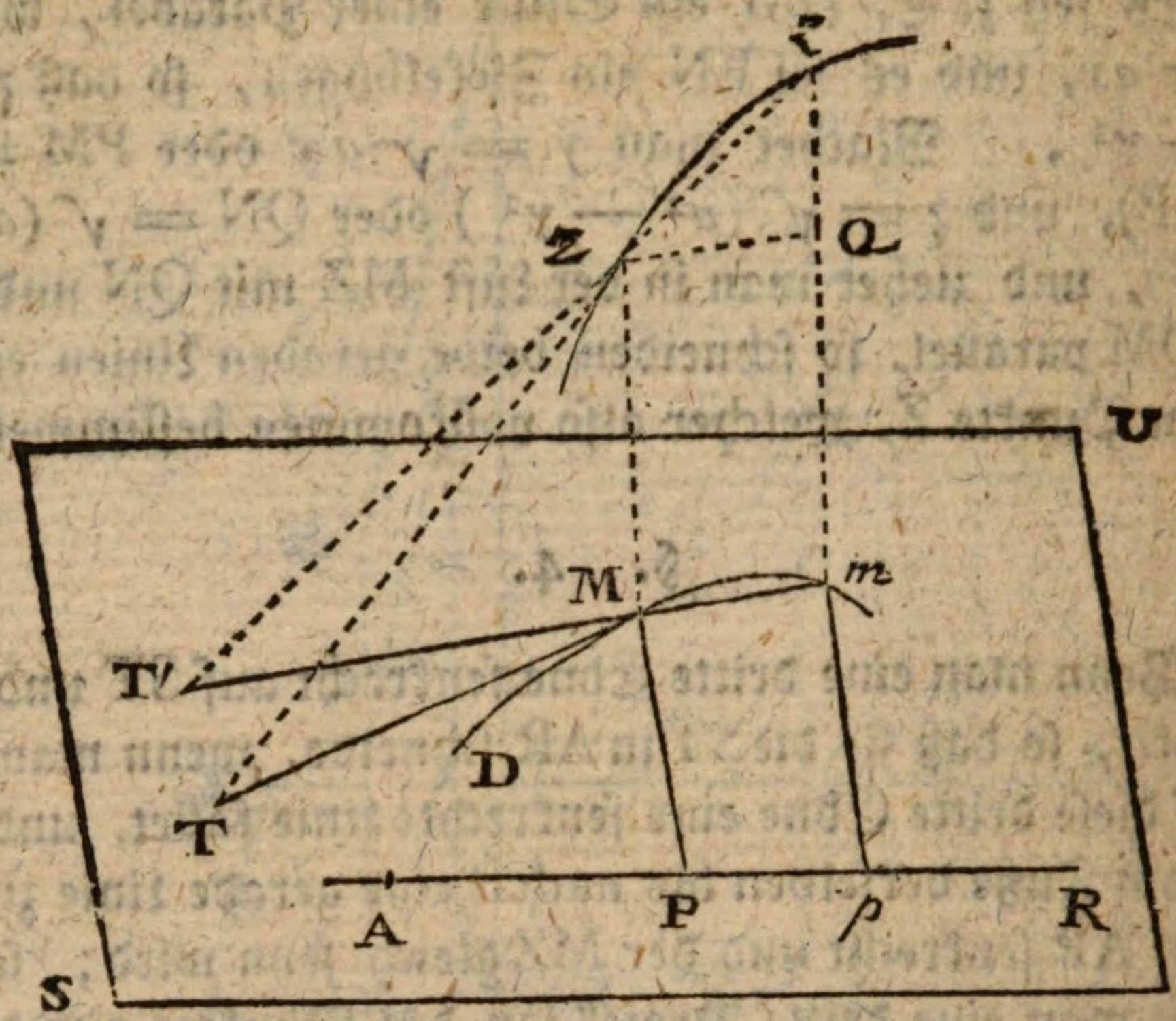
§. 5.

Aufgabe.

Die Subtangente und Subnormale einer doppelt gekrümmten Linie finden.

Auflösung.

(Siehe die folgende Figur.)



Man gedenke sich eine unbestimmte Ebne worinn die parallelen Linien MZ, *mz* liegen, und ziehe in derselben gerade Linien durch Z und z, desgleichen durch M und *m*, so werde diese Linien in der gedachten Ebne liegen, und (wenn sie nicht parallel sind) einander irgendwo in T' begegnen. Man rücke die Linie *mz* in Gedanken immer näher und näher an MZ, so bekömmt man, wenn Z auf z fällt, die Ebne worinn beide Tangenten liegen, und die durch Z und z, M und *m* gezogene geraden Linien zT, und *m*T, verwandeln sich in zwei Tangenten ZT und MT.

Man ziehe ZQ mit M*m* parallel, so ist, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke zQZ und ZMT'

$$zQ : QZ :: ZM, MT'$$
$$\text{oder } zQ : Mm :: ZM, MT'$$

Nun ist, wenn man die Gränzen der Differenzen nimmt, $zQ = dz$, hingegen M*m* ist beinahe die Differenz von DM. Ist also $DM = s$, so wird $Mm = ds$.

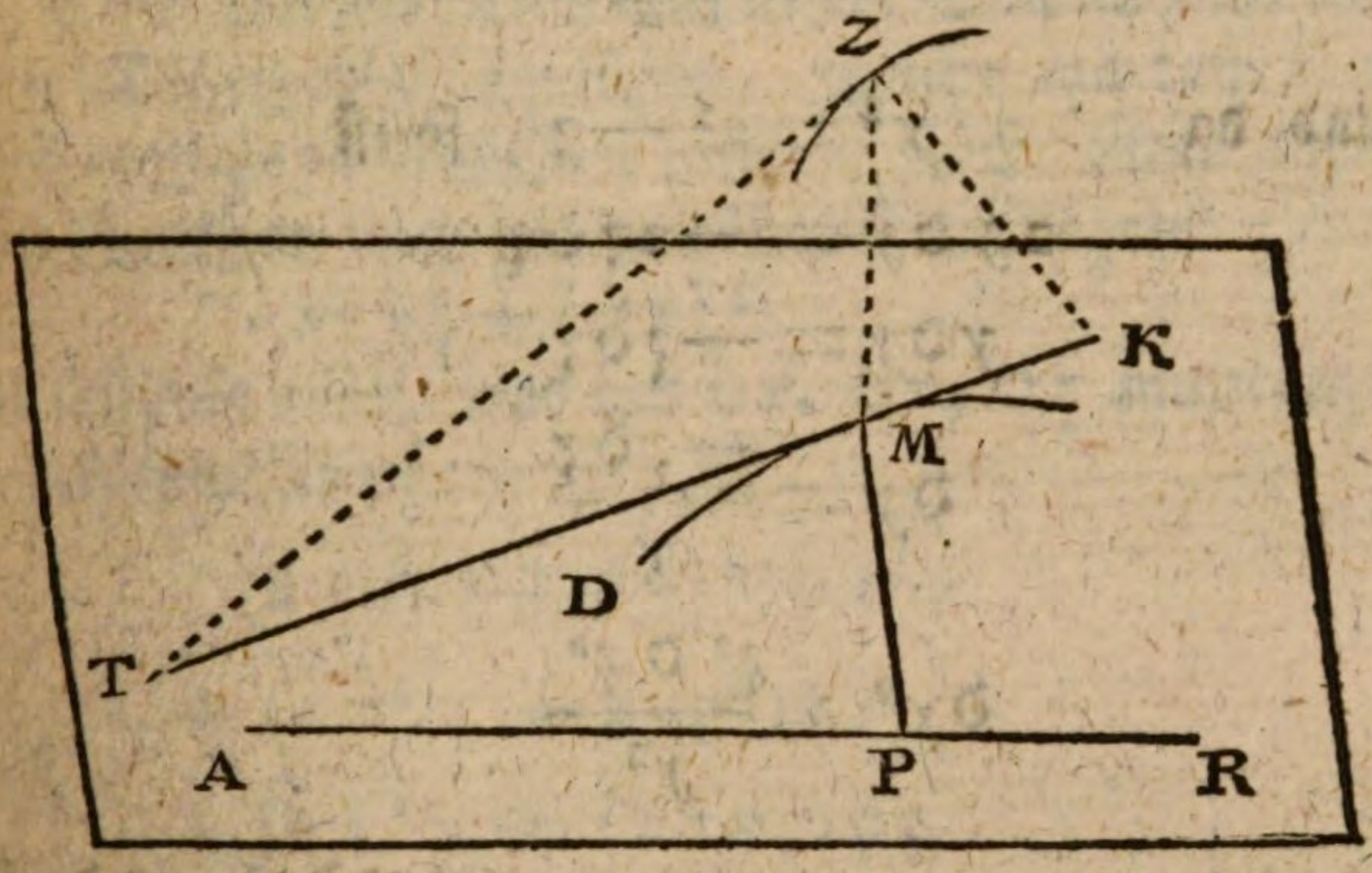
ZM

ZM ist $= z$. MT' hat zur Gränze MT, welche hier als Subtangente der Tangente ZT betrachtet wird.

Folglich ist

$$dz, ds :: z, MT$$

$$\text{daher } MT = z \frac{ds}{dz}$$



Was die Subnormal-Linie MK betrift, so entstehet dieselbe, wenn man ZK auf die Tangente TZ senkrecht ziehet. Da nun ZM auf der Ebne APM, folglich auch auf der in derselben liegenden geraden Linie TMK senkrecht ist, so ist

$$TM, MZ :: MZ, MK$$

$$z \frac{ds}{dz}, z :: z, MK$$

$$\text{daher } MK = z \frac{dz}{ds}$$

Exempel. Es sey, wie im § 3. angenommen worden $y^2 = ax$, und $z^2 = a^2 - y^2$.

Es ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. (XI. Hauptst. §. 2).
Da nun $ax = a^2 - z^2$ (§. 4), so ist

$$a\,dx = -2z\,dz$$

$$dx = \frac{-2z\,dz}{a}$$

$$dx^2 = \frac{4z^2\,dz^2}{a^2}$$

und da $y^2 = a^2 - z^2$, so ist

$$2y\,dy = -2z\,dz$$

$$y\,dy = -z\,dz$$

$$dy = \frac{-z\,dz}{y}$$

$$dy^2 = \frac{z^2\,dz^2}{y^2}$$

Folglich $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(\frac{4z^2\,dz^2}{a^2} + \frac{z^2\,dz^2}{y^2}\right)}$

$$= z\,dz\sqrt{\left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

$$= z\,dz\sqrt{\left(\frac{4y^2 + a^2}{a^2\,y^2}\right)}$$

$$= \frac{z \cdot dz}{ay}\sqrt{(4y^2 + a^2)}$$

Also $\frac{ds}{dz} = \frac{z \cdot \sqrt{(4y^2 + a^2)}}{ay}$

daher $z\frac{ds}{dz} = \frac{z^2 \cdot \sqrt{(4y^2 + a^2)}}{ay}$

und $z\frac{dz}{ds} = z \cdot \frac{ay}{z \cdot \sqrt{(4y^2 + a^2)}} = \frac{ay}{\sqrt{(4y^2 + a^2)}}$

§. 6.

§. 6.

Wir wollen uns nicht länger bei den doppelt gekrümmten Linien aufhalten, sondern zur Betrachtung der krummen Flächen übergehen. Vorher aber müssen wir den Leser mit den Parzial-Differenzen bekannt machen, als welche wir bald gebrauchen werden.

Eine Parzial-Differenz ist die Summe aller Sätze in einer Differenzial-Funkzion, welche mit dem nemlichen Differenziale multipliziret sind. Z. E. Man differenzire diese Funkzion nach den gewöhnlichen Regeln

$$ax^2yz + bxyz^2$$

und sammle alles, was mit dx, dy, dz multipliziret ist, so bekömmt man

$$(2axyz + byz^2)dx$$
$$+ (ax^2z + byz^2)dy$$
$$+ (ax^2y + 2bxyz)dz$$

und dieses sind die drei Parzial-Differenzen der gegebenen Funkzion. Wenn eine gegebene Differenzial-Funkzion die gehörigen Sätze und Parzial-Differenzen enthält, so nennet man sie ein **richtiges Differenzial.** Es giebt gewisse Verhältnisse, die da Statt finden müssen, wenn ein Differenzial richtig seyn soll.

Wenn man die Parzial-Differenzen einer Funkzion von x, y, z &c. gerades Weges finden will, so darf man nur erstlich so differenziren, als wäre x allein veränderlich, hernach als wäre y allein veränderlich, ferner als wäre nur z veränderlich, u. s. f. Z. E. Es sey die gegebene Funkzion $a\,x^n\,y^m\,z^k$

So bekömmt man in Betreff des x allein, und wenn man alle übrigen Größen als beständig betrachtet,

$$a\,n\,y^m\,z^k\,x^{n-1}\,dx$$

in Betreff des y ist ferner das Differenzial

$$a\,m\,x^n\,z^k\,y^{m-1}\,\partial y$$

und in Betreff des z hat man

$$a\,k\,x^n\,y^m\,z^{k-1}\,\partial z$$

Also ist das richtige Differenzial die Summe dieser drei Parzial-Differenzen, nemlich

$$a\,n\,y^m\,z^k\,x^{n-1}\,\partial x + a\,m\,x^n\,z^k\,y^{m-1}\,\partial y + a\,k\,x^n\,y^m\,z^{k-1}\,\partial z$$

welches man ebenfalls gefunden hätte, wenn man nach der gewöhnlichen Manier differenziret hätte.

Es kann folglich das Differenzial einer Funkzion von x und y allemal vorgestellet werden durch

$$M\,\partial x + N\,\partial y$$

und eine Differenzial-Funkzion von x, y, z, &c. kann überhaupt vorgestellet werden durch

$$M\,\partial x + N\,\partial y + P\,\partial z + \&c.$$

wo M, N, P, Q, &c. lauter Funkzionen der in der gegebenen Gleichung vorhandenen veränderlichen Größen sind.

§ 7.

Eine Haupt-Eigenschaft der Parzial-Differenzen ist diese: Es sey $M\partial y + N\partial x$ das richtige Differenzial einer Funkzion von x und y. Wenn man die Funkzion M in Betreff des x allein, und die Funkzion N in Betreff des y allein differenziret, so entstehen gleiche veränderliche Koeffizienten. Nemlich es sey $m\partial x = \partial M$ in Betreff des x allein, und es sey $n\partial y = \partial N$ in Betreff des y allein, so muß seyn $m = n$, und dieses ist eine von den vornehmsten Bedingungen, woran man erkennet, daß eine

gege-

gegebene Differenzial-Funkzion von x und y ein richtiges Differenzial ist.

Diesen Lehrsatz haben wir im selbstlernenden Algebristen gehörig bewiesen. Hier wollen wir nur anzeigen, daß man ihn auch vermöge einer bloßen Indukzion aus der Erfahrung abnehmen kann. Wir wollen zum Beispiele diese Funkzion nehmen,

$$a\,x^2\,y^2 + b\,y^3 + c\,x\,y$$

Man differenzire, so kömmt

$$(2\,a\,x^2\,y + 3\,b\,y^2 + c\,x)\,\partial\,y + (2\,a\,x\,y^2 + c\,y)\,\partial\,x$$

Hier ist $\mathrm{M} = 2\,a\,x^2y + 3\,b\,y^2 + c\,x$

$$\mathrm{N} = 2\,a\,xy^2 + c\,y$$

Man differenzire M in Betreff des x allein, und als wenn y beständig wäre, so kömmt

$$(4\,a\,x\,y + c)\,\partial\,x$$

und hier ist $m = 4\,a\,x\,y + c$

Man differenzire auch N in Betreff des y allein, so kömmt

$$(4\,a\,x\,y + c)\,\partial\,y$$

und hier ist $n = 4\,a\,x\,y + c$, woraus man siehet, daß in der That $m = n$.

Wenn also ein solches Differenzial als $\mathrm{M}\,\partial\,y + \mathrm{N}\,\partial\,x$ willkührlich gegeben wird, so muß man erst untersuchen, ob M in Betreff des x differenziret, den selbigen veränderlichen Koeffizienten giebt, als wenn man N in Betreff des y differenziret. Trift dieses nicht ein, so ist die gegebene

bene Differenzial = Funkzion das richtige Differenzial irgend einer Funkzion von x und y.

§. 8.

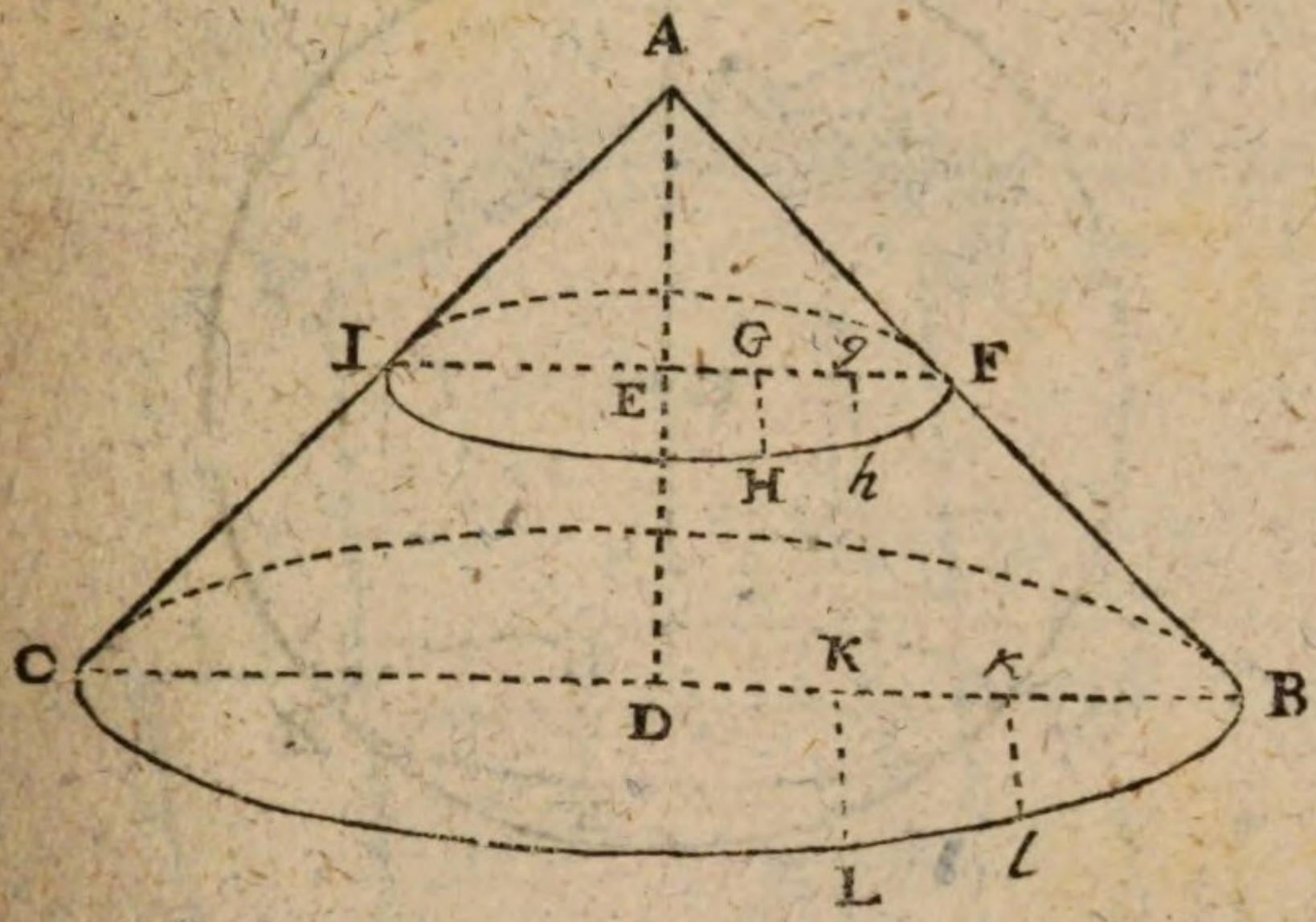
Um nun die Beschaffenheit der krummen Flächen zu untersuchen, so müssen wir allererst wissen, wie dieselben durch algebraische Gleichungen vorgestellet werden können.

Es werde in einer Ebne, innerhalb oder unter der krumen Fläche, eine gerade Linie als Richtlinie für x angenommen. Man stelle sich vor, diese erste Ebne und die darin liegende Richtlinie werden von unendlich vielen senkrechten Ebnen geschnitten, die zugleich die gegebene krumme Fläche schneiden. So sind die Durchschnitte dieser krummen Fläche und der gedachten senkrechten Ebnen lauter krumme Linien, deren Natur durch eine Gleichnng zwischen y und z ausgedrücket werden muß, wo wir unter y und z die nemlichen Koordinaten verstehen, als im 2ten und 3ten Paragraph dieses Hauptstückes. Die Gleichung zwischen y und z hat aber keinen beständigen Parameter, sondern es dienet ihr jedesmal x zum Parameter, das ist die Entfernung der schneidenden Ebne vom Ursprunge der erstlich angenommenen Richtlinie. Also entstehet eine Gleichung von 3 veränderlichen Größen x, y und z, und wenn x und y bestimmet werden, so folget daraus der Werth von z, welcher nichts anders ist, als die Entfernung zwischen der ersten Ebne, worin x lieget, und einem Punkte der krummen Fläche.

Ein Paar Exempel werden dieses am besten erläutern. Es sey AD die Axe eines geraden und rechtwinklichen Kegels, und BAC sey das rechtwinkliche Dreieck, welches den Durchschnitt desselben durch die Axe AD ausmachet.

Es

Es sey die Oberfläche des Kegels in FHI, BLC vermittelst solcher Ebnen geschnitten, die auf der Ebne BAC und

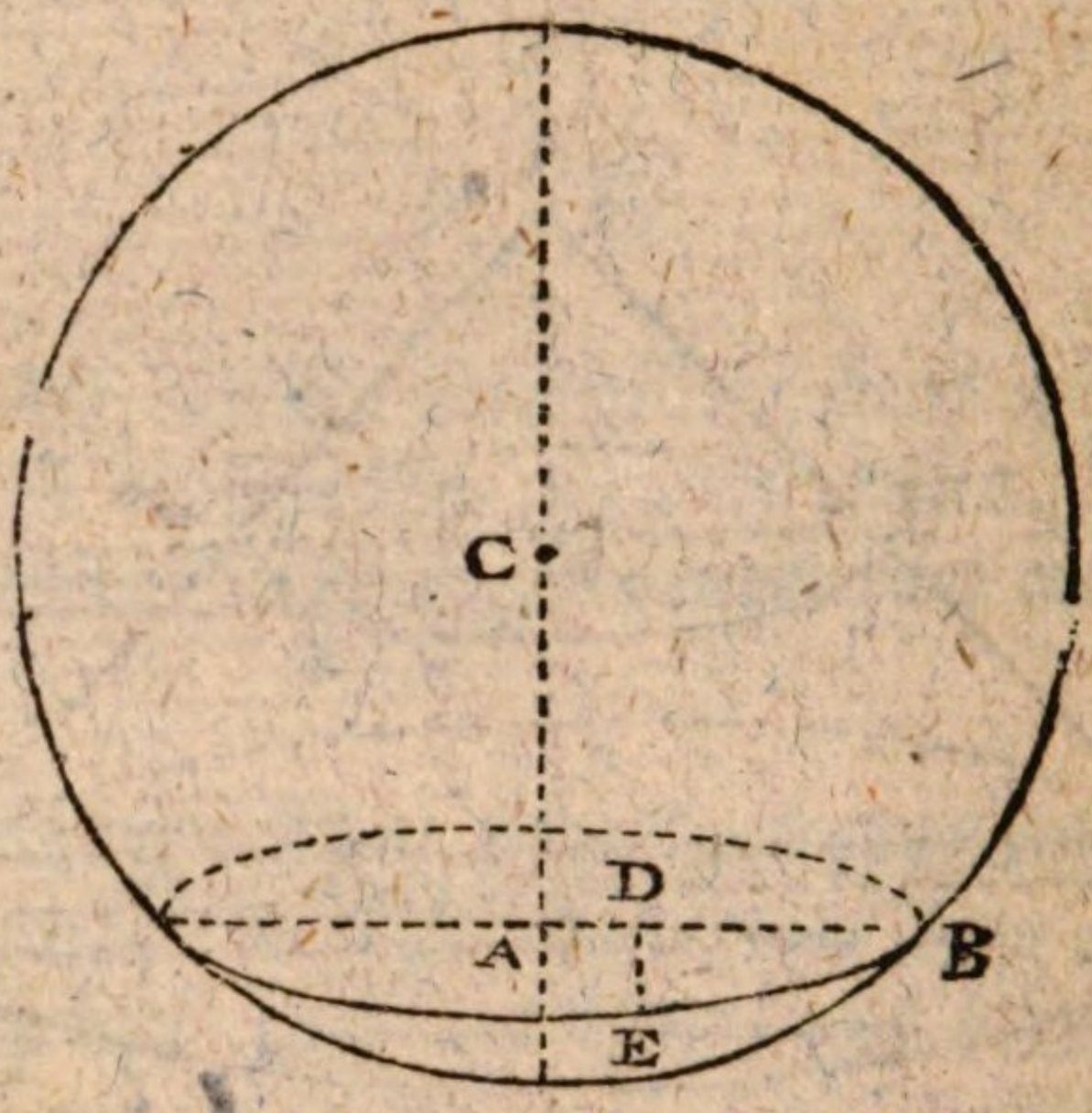


auf der Linie AD senkrecht stehen, so werden diese Durchschnitte Zirkel seyn. Auf den Diametern FI, BC errichte man senkrechte Linien GH, gh, KL, kl, die bis zu den Peripherien reichen.

Nun sey $AE = x$, $EG = y$; $GH = z$, so sind GE oder y, und GH oder z, zwei Koordinaten des Zirkels FHI, welcher EF zum Halbmesser hat. Es ist aber im rechtwinklichen Kegel $EF = AE = x$. Also hat man

$$z^2 = x^2 - y^2$$

Die nemliche Gleichung gilt auch für die Koordinaten Eg und gh. Sie gilt ebenfalls für den Zirkel BLC, wo DK oder $Dk = y$, und KL oder $kl = z$, nur daß hier $x = AD$. Man siehet also, da die schneidenden Zirkel ins Unendliche vervielfältiget werden können, daß die Gleichung $z^2 = x^2 - y^2$ alle mögliche Punkte der Kegelfläche bestimmet.



Es sey C der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser $= r$. Es sey $CA = x$ ein Theil des Diameters. Durch A gehe eine Ebne, welche die CA senkrecht schneidet, so ist der Schnitt ein Zirkel, dessen Halbmesser AB ist. Es sey $AD = y$ eine Abzisse, und $DE = z$ eine Applikate dieses Zirkels. Hier ist erstlich $(AB)^2 = r^2 - (AC)^2 = r^2 - x^2$, weil CA und AB in der Ebne eines größten Zirkels der Kugel liegen. Ferner $(ED)^2 = (AB)^2 - (AD)^2$, weil AD und DE im Zirkel liegen, der AB zum Halbmesser hat. Also ist $z^2 = (AB)^2 - y^2$, oder weil $AB^2 = r^2 - x^2$, so ist

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2$$

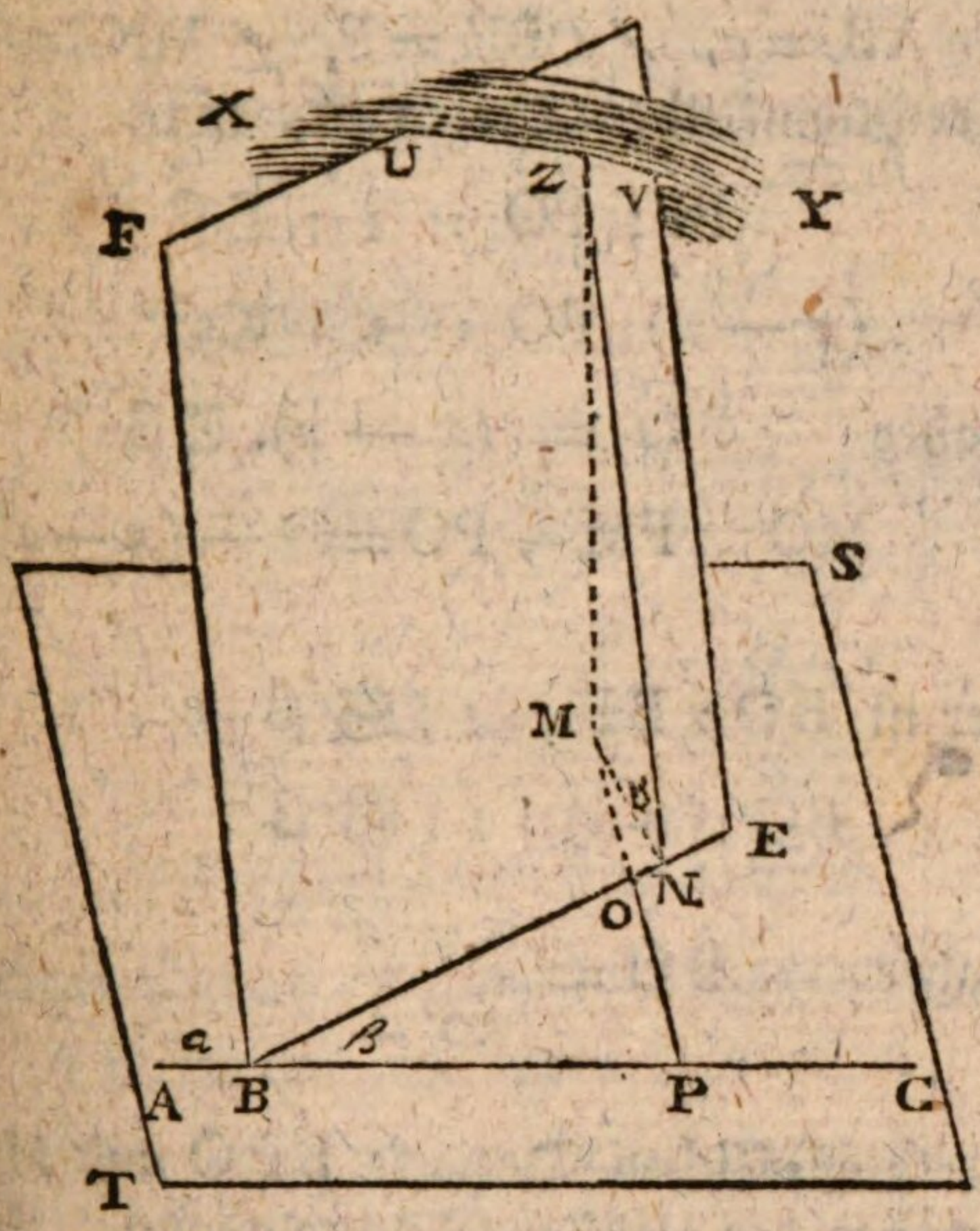
und dieses ist die Gleichung für die Oberfläche der Kugel.

§. 9.

Aufgabe.

Wenn eine krumme Fläche von einer Ebne geschnitten wird, so entstehet in dieser Ebne eine krum-

krumme Linie. Es soll der Halbmesser der Krümmung für jeden Punkt derselben gefunden werden.



Auflösung. Es werde die krumme Fläche, wovon XY einen Theil vorstellet, in UV von der Ebne EF geschnitten. Es sey Z ein Punkt der UV, welcher folglich zugleich ein Punkt der krummen Fläche XY ist. Es sey wie vorher, ZM $=z$, MP $=y$, AP $=x$. Die Größe z ist hier eine Funkzion von x und y. Folglich wird $dz = m\,dy + n\,dx$. Hier ist $m\,dy$ das Differenzial der Funkzion z in Betreff des y allein, und $n\,dx$ ist das Differenzial der nemlichen Funkzion in Betreff des x allein.

Es sey BE der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebnen ST und EF. Vom Punkte M, der in der Ebne ST lieget, fälle MN senkrecht auf BE. Ziehe ZN, welche in der Ebne EF liegen wird, so ist auch ZN senkrecht auf BE,

und

und $\angle$ MNZ ist nichts anders als der Winkel, der die Neigung beider Ebnen ST und EF bestimmet.

Es sey AB $= a$, $\angle$ CBE $= \beta$, $\angle$ MNZ $= \delta$. Weil BPO ein rechtwinkliches Dreieck ist, so ist

$$\text{BP; PO} :: 1 : \mathfrak{T}\beta$$

$$(x - a); \text{PO} :: 1 : \mathfrak{T}\beta$$

daher $$\text{PO} = (x - a).\mathfrak{T}\beta$$

folglich $$\text{MO} = \text{PM} - \text{PO} = y - (x - a)\mathfrak{T}\beta.$$

Ferner ist $$\text{BO} : \text{BP} :: 1 : \mathfrak{S}'\beta$$

$$\text{BO} : (x-a) :: 1 : \mathfrak{S}'\beta$$

daher $$\text{BO} = \frac{x - a}{\mathfrak{S}'\beta}$$

Die rechtwinklichen Dreiecke BPO und MNO sind ähnlich, wegen der gleichen Scheitelwinkel. Folglich ist auch $\angle$ NMO $= \angle$ OBP $= \beta$. Also ist

$$\text{MO} : \text{MN} :: 1, \mathfrak{S}'\beta$$

$$[y - (x - a)\mathfrak{T}\beta] : \text{MN} :: 1, \mathfrak{S}'\beta$$

daher $$\text{MN} = y\mathfrak{S}'\beta - (x - a)\mathfrak{T}\beta.\mathfrak{S}'\beta$$

$$= y\mathfrak{S}'\beta - (x - a)\mathfrak{S}\beta, \text{ weil } \mathfrak{T}\beta = \frac{\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\beta}$$

Weiter ist $$\text{MO, ON} :: 1, \mathfrak{S}\beta$$

$$[y - (x - a)\mathfrak{T}\beta] : \text{ON} :: 1, \mathfrak{S}\beta$$

folglich $$\text{ON} = y\mathfrak{S}\beta - (x - a).\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\beta$$

Nun ist $BN = BO + ON$

$$= \frac{x-a}{\mathfrak{S}'\beta} + y\mathfrak{S}\beta - (x-a).\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\beta$$

$$= y\mathfrak{S}\beta + (x-a).\left(\frac{1}{\mathfrak{S}'\beta} - \mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\beta\right)$$

$$= y\mathfrak{S}\beta + (x-a).\left(\frac{1}{\mathfrak{S}'\beta} - \frac{(\mathfrak{S}\beta)^2}{\mathfrak{S}'\beta}\right)$$

$$= y\mathfrak{S}\beta + (x-a).\frac{1-\mathfrak{S}\beta^2}{\mathfrak{S}'\beta}$$

$$= y\mathfrak{S}\beta + (x-a)\frac{\mathfrak{S}'\beta^2}{\mathfrak{S}'\beta}$$

$$= y\mathfrak{S}\beta + (x-a)\mathfrak{S}'\beta$$

Weil das Dreieck ZMN in M rechtwinklich ist, so ist

$ZN, MN :: 1, \mathfrak{S}'z$

$ZN : [y\mathfrak{S}'\beta - (x-a).\mathfrak{S}\beta] :: 1, \mathfrak{S}'z$

daher $ZN = \frac{y.\mathfrak{S}'\beta - (x-a)\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'z}$

Ferner ist $MN : MZ :: 1 : \mathfrak{T}z$

$[y\mathfrak{S}'\beta - (x-a).\mathfrak{S}\beta] : MZ :: 1 : \mathfrak{T}z$

daher $z = MZ = [y\mathfrak{S}'\beta - (x-a)\mathfrak{S}\beta].\mathfrak{T}z$

Weil nun $\mathfrak{S}'\beta$, $\mathfrak{S}\beta$, $\mathfrak{T}z$ beständige Größen sind, so ist

$dz = m\,dy + n\,dx = [dy.\mathfrak{S}'\beta - dx\,\mathfrak{S}\beta].\mathfrak{T}z$

oder $m\,dy + n\,dx = dy.\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}z - dx.\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}z$

$(n + \mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}z)\,dx = (\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}z - m)\,dy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}z + n}{\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}z - m}$$

Es sey BN $= t$, und NZ $= u$, so sind t und u die Koordinaten des Schnittes UV. Der Halbmesser der Krümmung für den Punkt Z der Linie UV sey ρ, so ist (XII. Hauptst. §. 7.)

$$\varrho = \frac{(1 + P^2)^{\frac{3}{2}}}{-Q}$$

Hier ist $P = \frac{\partial u}{\partial t}$, und Q ist $= \frac{\partial P}{\partial t}$ oder $\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \partial t$.

Also ist $$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \partial t}$$

gesetzt nemlich, daß die Konkavität des Schnittes UV nach BE zu gewandt sei. Es ist aber

$$t = \mathrm{BN} = y\,\mathfrak{S}\beta + (x - a)\,\mathfrak{S}'\beta$$

folglich $$\partial t = \partial y\,\mathfrak{S}\beta + \partial x\,\mathfrak{S}'\beta$$

$$u = \mathrm{NZ} = \frac{y\,\mathfrak{S}'\beta - (x - a)\,\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\gamma}$$

folglich $$\partial u = \frac{\partial y . \mathfrak{S}'\beta - \partial x\,\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\gamma}$$

also $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial y . \mathfrak{S}'\beta - \partial x\,\mathfrak{S}\beta}{(\partial y\,\mathfrak{S}\beta + \partial x\,\mathfrak{S}'\beta) . \mathfrak{S}'\gamma}$$

oder $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} . \mathfrak{S}'\beta - \mathfrak{S}\beta}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\,\mathfrak{S}\beta . + \mathfrak{S}'\beta\right) . \mathfrak{S}'\gamma}$$

Es

Es ist aber $\frac{dy}{dx} = \frac{S\beta . T^z + n}{S'\beta T^z - m}$

Substituiret man diesen Werth, so kömmt

$$\frac{du}{dt} = \frac{nS'\beta + mS\beta}{S^z + S'^z (nS\beta - mS'\beta)}$$

Differenziret man zum zweitenmale, und dividiret durch dt, so bekömmt man

$$d\left(\frac{du}{dt}\right) : dt = \frac{S^z (dm.S\beta + dn.S'\beta) + S'^z (ndm - mdn)}{dt[S^z + S'^z (nS\beta - mS'\beta)]^2}$$

Weil $dz = m dy + n dx$, so sei ferner

$$dm = p dy + q dx$$

$$dn = q dy + r dx$$

Wir multipliziren dx im ersten Differenziale und dy im zweiten, beide mit q, weil, im richtigen Differenziale $dz = m d + n dx$, das m, wenn man es in Betreff des x differenziret, den nemlichen Koeffizienten geben muß, als das n, wenn man es in Betreff des y differenziret (§. 7.) Weil nun $dm = p dy + q dx$, und $dt = dy S\beta + dx S'\beta$, so wird

$$\frac{dm}{dt} = \frac{p dy + q dx}{dy S\beta + dx S'\beta}$$

oder

$$\frac{dm}{dt} = \frac{p \frac{dy}{dx} + q}{\frac{dy}{dx} S\beta + S'\beta}$$

und setzet man anstatt $\frac{dy}{dx}$ dessen Werth $\frac{S\beta . T^z + n}{S'\beta . T^z - m}$

so kömmt

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{p(\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\gamma.+n)+q(\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}\gamma-m)}{\mathfrak{T}\gamma+n\mathfrak{S}\beta-m\mathfrak{S}'\beta}$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{q\partial y+r\partial x}{\partial y.\mathfrak{S}\beta+\partial x.\mathfrak{S}'\beta}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{q\frac{\partial y}{\partial x}+r}{\frac{\partial y}{\partial x}\mathfrak{S}\beta+\mathfrak{S}'\beta}$$

und, wenn man auch hier anstatt $\frac{\partial y}{\partial x}$ dessen Werth setzet, so ist

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{q(\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\gamma+n)+r(\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}\gamma-m)}{\mathfrak{T}\gamma+n\mathfrak{S}\beta-m\mathfrak{S}'\beta}$$

Diese Werthe von $\frac{\partial m}{\partial t}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}$ setze man in den kurz vorher gefundenen Ausdruck für $\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right):\partial t$, so bekömmt man

$$\frac{[(\mathfrak{S}\gamma.\mathfrak{S}\beta+n\mathfrak{S}'\gamma)]\times[(\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\gamma+n)p+(\mathfrak{S}'\beta\mathfrak{T}\gamma-m)q]+[\mathfrak{S}\gamma.\mathfrak{S}'\beta-m\mathfrak{S}'\gamma]\times[(\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\gamma+n)q+(\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}\gamma-m)r]}{(\mathfrak{S}'\gamma)^2.(\mathfrak{T}\gamma+n\mathfrak{S}\beta-m\mathfrak{S}'\beta)^3}$$

Und setzet man ferner in die Formel

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right):\partial t}$$

Die

Die Werthe von $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ und von $d\left(\frac{du}{dt}\right) : dt$, so erhält man

$$\rho = \frac{-[(\mathfrak{S}'\alpha)^2.(\mathfrak{T}\alpha + n\mathfrak{S}\beta - m\mathfrak{S}'\beta)^2 + n.\mathfrak{S}'\beta + m\mathfrak{S}\beta)^2]^{\frac{3}{2}} : \mathfrak{S}'\alpha}{[\mathfrak{Z}\alpha.\mathfrak{S}\beta + n\mathfrak{S}'\alpha] \times [(\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\alpha + n)p + (\mathfrak{S}'\beta\ \mathfrak{T}\alpha - m)q.] + [\mathfrak{S}\alpha.\mathfrak{S}'\beta - m\mathfrak{S}'\alpha] \times (\mathfrak{S}\beta.\mathfrak{T}\alpha + n)q + (\mathfrak{S}'\beta.\mathfrak{T}\alpha - m)r]}$$

Dieses ist der Halbmesser der Krümmung für jeden Schnitt wie UV.

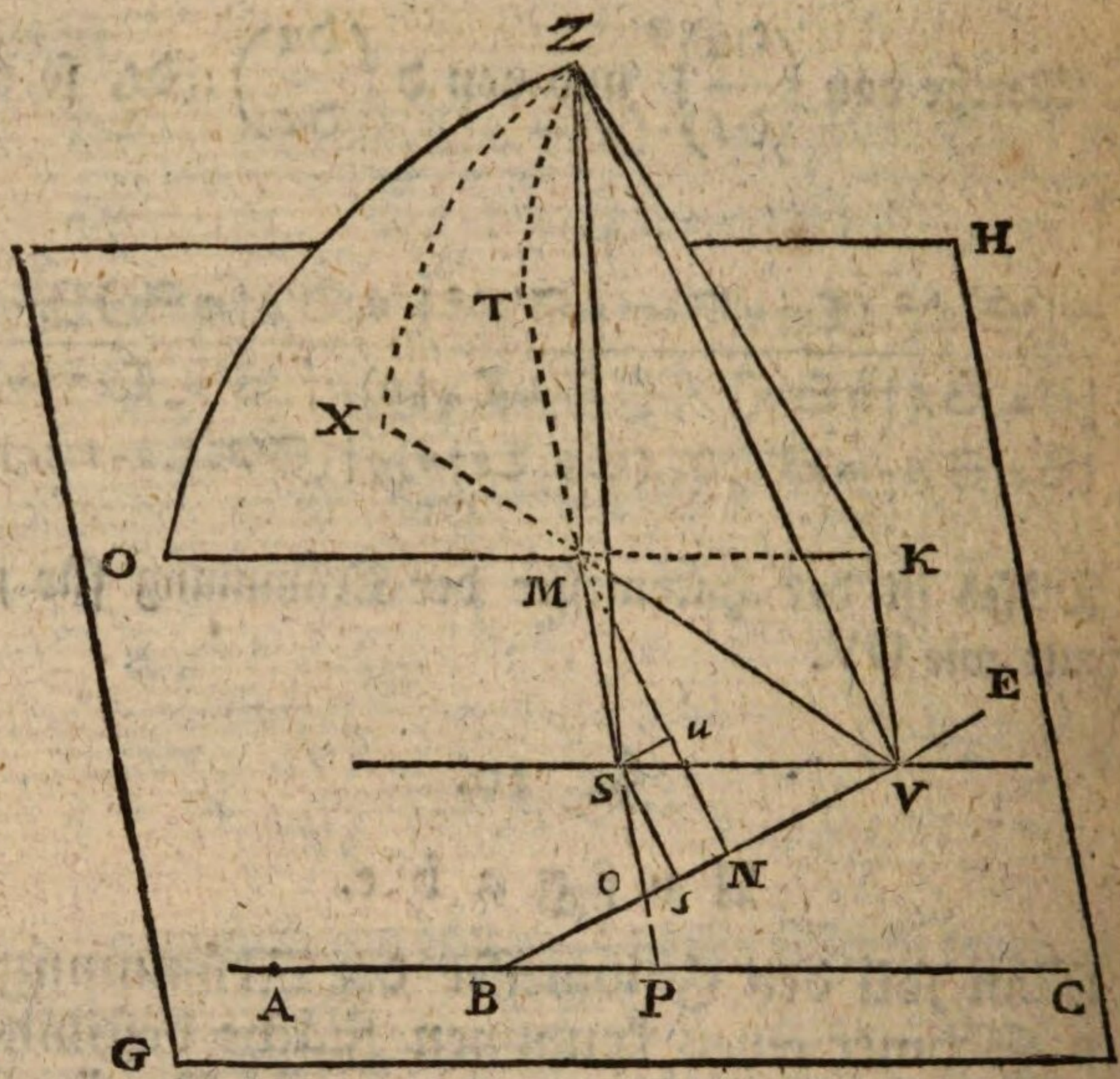
§. 10.

Aufgabe.

Man soll den Halbmesser der Krümmung für einen Schnitt einer krummen Fläche bestimmen, welcher auf derselben in einem gewissen Punkte senkrecht sey.

Auflösung. Wir wollen anfänglich annehmen, die krumme Fläche werde von zwey Ebnen geschnitten, wel-

(Siehe die folgende Figur.)



che beide auf der Ebne GH senkrecht stehen, und welche durch den Punkt Z gehen. Die eine schneidende Ebne OMZ soll parallel seyn mit AP oder x, die andere TMZ soll durch PM oder y gehen. Diese beiden Schnitte sind besonders merkwürdig, und werden die allgemeine Auflösung der Aufgabe vorbereiten.

Wenn man MZ oder z verändert, jedoch so, daß diese Linie allemal in der Ebne des Schnittes MZO bleibe, so wird sich y nicht verändern, weil MO mit AP parallel ist. Folglich da z eine Funkzion von x und y ist, so wird das Differenzial des z nur in Betreff des x allein genommen werden müssen, und es wird seyn $dz = n dx$, wenn man z als eine Ordinate des Schnittes MZO betrachtet. Hingegen, verändert man z, so daß dieses z immer im Schnitte ZMT bleibe, so bleibet x unverändert, und es wird $dz = m dy$, wenn nemlich z als eine Ordinate des Schnittes ZMT betrachtet wird. Man ziehe für die Krümmungen beider

beider Schnitte ZMO und ZMT die Normal-Linien ZK und ZS, so wird die Subnormal-Linie $MK = z\frac{dz}{dx}$. Da nun $dz = ndx$, so ist $\frac{dz}{dx} = n$ folglich $MK = nz$. Die Subnormal-Linie MS ist $= z\frac{dz}{dy} = mz$ (weil $dz = m\,dy$ und also $\frac{dz}{dy} = m$) oder vielmehr $= -mz$, weil die Ordinaten y von P nach M, hingegen MS von M nach P zu gerechnet werden.

Auf der Ebne GH ziehe ich gerade Linien KV und SV parallel mit MS und MK. Durch den Punkt V, wo sie einander schneiden, ziehe ich VZ, so wird diese VZ normal oder senkrecht seyn für die Krümmung beider Schnitte. Dieses wird man am besten begreifen, wenn man sich zwei Ebnen vorstellet, die eine ZKV ist auf dem Bogen ZO oder dessen Tangente in Z senkrecht. Die andere ZSV ist auf den Bogen ZT oder dessen Tangente in Z senkrecht. Beide Ebnen schneiden einander in ZV, also ist ZV senkrecht auf beiden Bogen oder eigentlich auf beiden Tangenten. Daraus folget ferner, daß ZV auf die krumme Fläche bei Z oder eigentlich auf einer Ebne, welche die krumme Fläche in Z berühret, senkrecht stehe. Denn beide erwähnte Tangenten liegen in solcher berührenden Ebne; da nun ZV auf zwei geraden Linien in der berührenden Ebne senkrecht stehet, so stehet ZV auch senkrecht auf derselben Ebne, wie es in der gemeinen Geometrie gelehret wird. Also ist ZV senkrecht auf der krummen Fläche in Z.

Ich ziehe MV, so ist das Dreieck MKV rechtwinklich in K, folglich

$$MV^2 = MK^2 + KV^2$$
$$= n^2z^2 + m^2z^2$$
$$MV = z\sqrt{(m^2 + n^2)}$$

Das Dreieck ZMV ist rechtwinklich in M, folglich

$$ZV^2 = ZM^2 + MV^2$$
$$= z^2 + z^2n^2 + z^2m^2$$
$$ZV = z\sqrt{(1 + n^2 + m^2)}$$

Alle Schnitte die im Punkte Z auf der Fläche perpendikular sind, haben ZV zur Normal-Linie. Wenn der Schnitt, dessen Halbmesser der Krümmung wir oben (§ 9) gefunden haben, gegen die Fläche im Punkte Z perpendikular ist, so wird BE, der gemeinschaftliche Schnitt derselben mit der Ebne GH, durch den Punkt V gehen. Ziehet man nun MN auf BE, Su und Ss auf MN und BE senkrecht, so hat man die rechtwinklichen Dreiecke SsV und SuM. Es ist $\angle SVs = \angle EBC = \beta$. Also

$$SV, Ss :: 1, S\beta$$

oder weil $SV = MK$ und $Ss = Nu$

$$MK, Nu :: 1, S\beta$$
$$nz, Nu :: 1, S\beta$$

daher $Nu = nz \cdot S\beta$

Ferner ist wegen der ähnlichen Dreiecke BoP, sSo, SMu, $\angle SMu = \angle oBP = \angle\beta$, also

$$MS, Mu :: 1, S'\beta$$
$$-mz, Mu :: 1, S'\beta$$

daher $Mu = -mz\,S'\beta$

Folglich ist $MN = n\zeta S\beta - m\zeta S'\beta$

Nun ist, wenn wir uns, wie bei §. 9. noch eine Linie ZN einbilden, die mit MN den Winkel ε machet,

$$MN, \zeta :: 1, T\varepsilon$$
$$(n\zeta S\beta - m\zeta S'\beta) : \zeta :: 1, T\varepsilon$$
$$(nS\beta - mS'\beta) : 1 :: 1, T\varepsilon$$

daher $T\varepsilon = \frac{1}{nS\beta - mS'\beta}$

Es ist aber $S\varepsilon = \frac{T\varepsilon}{\sqrt{(1 + T\varepsilon^2)}}$

folglich $S\varepsilon = \frac{1}{nS\beta - mS'\beta} : \sqrt{\left(1 + \frac{1}{(nS\beta - mS'\beta)^2}\right)}$

$$= \frac{1}{nS\beta - mS'\beta} : \sqrt{\left(\frac{(nS\beta - mS'\beta)^2 + 1}{(nS\beta - mS'\beta)^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{nS\beta - mS'\beta} : \frac{\sqrt{[1 + (nS\beta - mS'\beta)^2]}}{nS\beta - mS'\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[1 + (nS\beta - mS'\beta)^2]}}$$

Es ist ferner

$$S'\varepsilon^2 = 1 - S\varepsilon^2$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + (nS\beta - mS'\beta)^2}$$

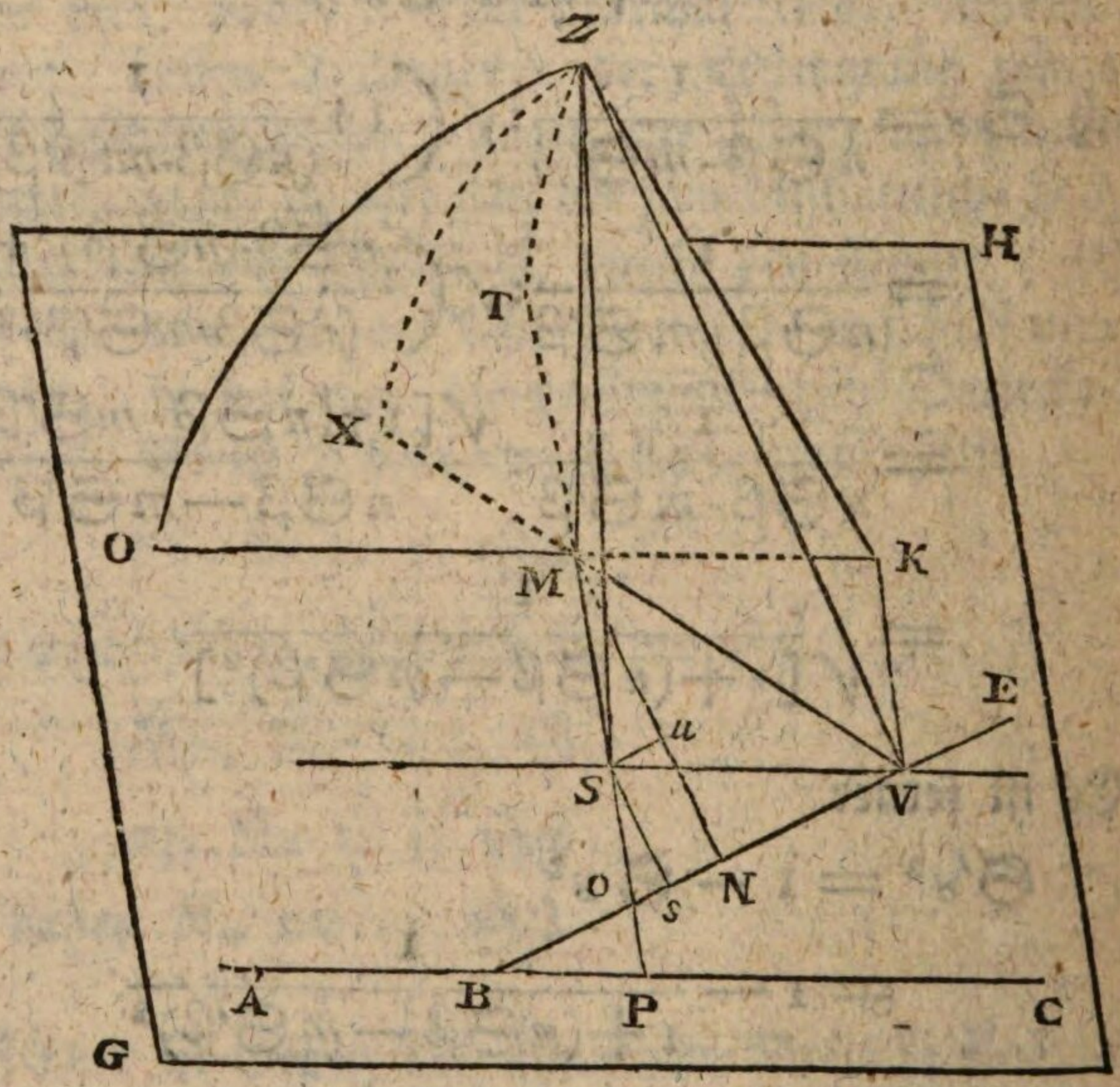
$$= \frac{(nS\beta - mS'\beta)^2}{1 + (nS\beta - mS'\beta)^2}$$

$$S'\varepsilon = \frac{nS\beta - mS'\beta}{\sqrt{[1 + (nS\beta - mS'\beta)^2]}}$$

Seßet man diese Werthe von T_z, S_z, S'_z in die obige Formel für den Halbmesser der Krümmung, so kömmt

$$\varrho = \frac{-[1+(n\mathfrak{S}\beta - m\mathfrak{S}'\beta)^2](1+m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}{[(1+n^2)\mathfrak{S}\beta - mn\mathfrak{S}'\beta](p[(1+n^2)\mathfrak{S}\beta - mn\mathfrak{S}'\beta] + q[(1+m^2)\mathfrak{S}'\beta - mn\mathfrak{S}\beta])}$$
$$[(1+m^2)\mathfrak{S}'\beta - mn\mathfrak{S}\beta](q[(1+n^2)\mathfrak{S}\beta - mn\mathfrak{S}'\beta] + r[(1+m^2)\mathfrak{S}'\beta - mn\mathfrak{S}\beta])$$

Dieses ist der Halbmesser der Krümmung für jeden Schnitt der durch den Punkt Z gehet und auf der krummen Fläche senkrecht ist.



Zusatz. Wenn man den Halbmesser der Krümmung für den Schnitt ZMV finden will, so stelle man sich vor, daß BE durch den Punkt M gehet, oder daß $MN = o$. Es ist aber $MN = nz\mathfrak{S}\beta - mz\mathfrak{S}'\beta$,

also $o = n z \mathfrak{S}\beta - m z \mathfrak{S}'\beta$

$o = n \mathfrak{S}\beta - m \mathfrak{S}'\beta$

$o = \frac{n \mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\beta} - m$

$o = \frac{\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\beta} - \frac{m}{n}$

$\frac{\mathfrak{S}\beta}{\mathfrak{S}'\beta} = \frac{m}{n}$ oder $n \mathfrak{S}\beta = m \mathfrak{S}'\beta$

$n \mathfrak{S}\beta = m \sqrt{(1 - \mathfrak{S}\beta^2)}$

Aus dieser letzten Gleichung ziehet man

$$\mathfrak{S}\beta = \frac{m}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$$

Weil $n \mathfrak{S}\beta = m \mathfrak{S}'\beta$

so ist $n(1 - \mathfrak{S}'\beta^2) = m \mathfrak{S}'\beta$

daher $\mathfrak{S}'\beta = \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$

Setzet man diese Werthe von $\mathfrak{S}\beta$ und $\mathfrak{S}'\beta$ in der letztgefundenen Formel, so ist

$$\varrho = \frac{-(m^2 + n^2)(1 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}{m^2 p + 2 m n q + n^2 r}$$

Wenn man annimmt $NV = o$, so wird MV senkrecht auf BE. So bekömmt man einen Schnitt der krummen Fläche, der auf ihrem Punkte Z senkrecht ist, und mit MVZ einen geraden Winkel machet. Man muß den Aus-

druck

druck für NV suchen. Man hat die rechtwinklichen Dreiecke SsV, SuM

$$\begin{aligned} SV\,(=MK),\ sV &:: 1,\ \mathfrak{S}'\beta \\ nz,\ sV &:: 1,\ \mathfrak{S}'\beta \\ sV &= nz\,\mathfrak{S}'\beta \\ MS,\ Su &:: 1,\ \mathfrak{S}\beta \\ -mz,\ Su &:: 1,\ \mathfrak{S}\beta \\ (sN=)\ Su &= -mz\,\mathfrak{S}\beta \end{aligned}$$

Es ist aber
$$\begin{aligned} NV &= sV - sN \\ &= nz\,\mathfrak{S}'\beta - (-mz\,\mathfrak{S}\beta) \\ &= nz\,\mathfrak{S}'\beta + mz\,\mathfrak{S}\beta \end{aligned}$$

Wenn $NV = o$, so ist also

$$\begin{aligned} nz\,\mathfrak{S}'\beta + mz\,\mathfrak{S}\beta &= o \\ n\,\mathfrak{S}'\beta + m\,\mathfrak{S}\beta &= o \\ n\,\mathfrak{S}'\beta &= -m\,\mathfrak{S}\beta \\ n^2\,\mathfrak{S}'\beta^2 &= m^2\,\mathfrak{S}\beta^2 \\ n^2(1-\mathfrak{S}\beta^2) &= m^2\,\mathfrak{S}\beta^2 \\ n^2 - n^2\,\mathfrak{S}\beta^2 &= m^2\,\mathfrak{S}\beta^2 \\ n^2 &= (m^2+n^2)\,\mathfrak{S}\beta^2 \end{aligned}$$

$$\frac{n^2}{m^2+n^2} = \mathfrak{S}\beta^2$$

$$\frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}} = \mathfrak{S}\beta$$

Auf eine ähnliche Art findet man

$$\mathfrak{S}'\beta = \frac{-m}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$$

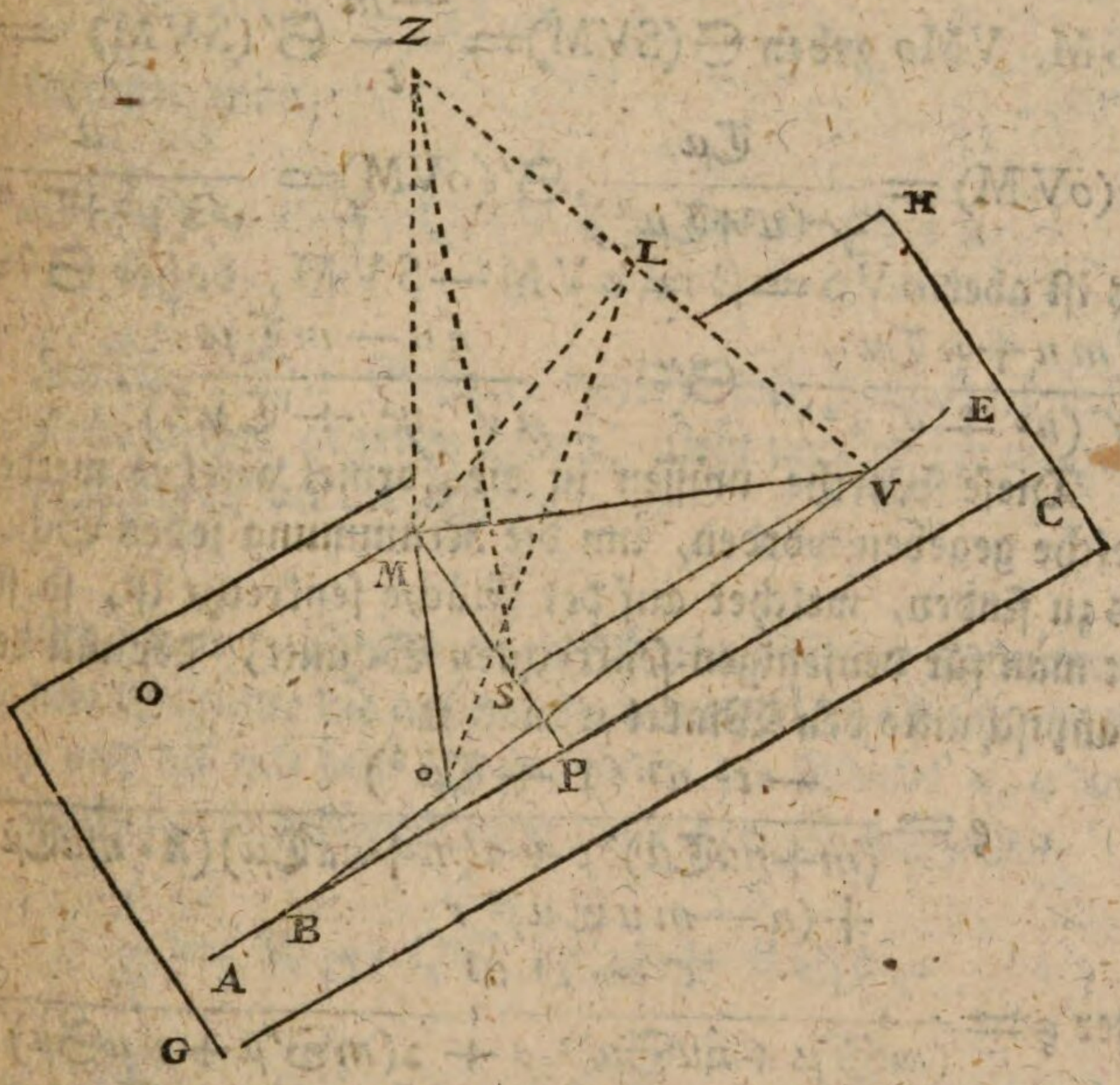
setzet man nun diese Werthe in die allgemeine Formel, so findet man für den Halbmesser der Krümmung im gegenwärtigen Falle

$$\varrho = \frac{-(m^2+n^2)\sqrt{(1+m^2+n^2)}}{n^2 p - 2mnq + m^2 r}$$

§. 11.

Aufgabe.

Wir wollen den Schnitt ZMV als den vornehmsten von allen betrachten, die im Punkte M auf der Fläche senkrecht sind. Und wir werfen die Frage auf, wie man die Krümmung der übrigen bestimmen kann, wenn der Winkel bekannt ist, den sie mit dieser machen.



Auf der Ebne ZMV errichte ich eine Perpendikularlinie Mo, und aus dem Punkte M ziehe ich auf ZV eine senkrechte Linie ML. Ich ziehe oL, welche auch auf ZV senkrecht seyn wird, und der Winkel MLo, welchen ich μ nenne, ist derjenige, welchen die Ebne BVZ des Schnittes, dessen Krümmung wir suchen, mit der Ebne des Hauptschnittes machet. Der Kürze halben sey $\sqrt{(m+n^2)} = t$,

$= t$, $\sqrt{(1+m^2+n^2)} = u$. Dieses vorausgesetzet, so haben wir die rechtwinklichen Dreiecke ZMV, MLV, welche geben, $\mathfrak{S}(MVZ) = \frac{1}{u}$, und $ML = \frac{tz}{u}$. Also im rechtwinklichen Dreiecke LMo, ist $Mo = \frac{tz}{u}\,\mathfrak{T}\mu$, daher $Vo = \frac{tz}{u}\sqrt{(u^2+\mathfrak{T}\mu^2)}$. Die rechtwinklichten Dreiecke VSM, VMo geben $\mathfrak{S}(SVM) = \frac{-m}{t}$ $\mathfrak{S}'(SVM) = \frac{n}{t}$

$$\mathfrak{S}(oVM) = \frac{\mathfrak{T}\mu}{\sqrt{(u^2+\mathfrak{T}\mu^2)}}, \mathfrak{S}'(oVM) = \frac{u}{\sqrt{(u^2+\mathfrak{T}\mu^2)}}.$$

Es ist aber $oVS = \beta = oVM - SVM$, daher $\mathfrak{S}^6 = \frac{mn+n\mathfrak{T}\mu}{t\sqrt{(u^2+\mathfrak{T}\mu^2)}}$, $\mathfrak{S}'^6 = \frac{nu-m\mathfrak{T}\mu}{t\sqrt{(u^2+\mathfrak{T}\mu^2)}}$.

Diese Werthe müssen in die Formel gesetzet werden, welche gegeben worden, um die Krümmung jedes Schnittes zu finden, welcher auf der Fläche senkrecht ist, so findet man für denjenigen senkrechten Schnitt, der mit dem Hanptschnitte den Winkel μ machet.

$$\varrho = \frac{-t^2u^3(1+\mathfrak{T}\mu^2)}{(m+nu\mathfrak{T}\mu)^2 p + 2(m+nu\mathfrak{T}\mu)(n-mu\mathfrak{T}\mu)q + (n-mu\mathfrak{T}\mu)^2 r}$$

oder

$$\varrho = \frac{-t^2u^3}{(m\mathfrak{S}'\mu+nu\mathfrak{S}\mu)^2 p + 2(m\mathfrak{S}'\mu+nu\mathfrak{S}\mu)(n\mathfrak{S}'\mu-nu\mathfrak{S}\mu)q + (n\mathfrak{S}'\mu-mu\mathfrak{S}\mu)^2 r}$$

Es ist aber

$$\mathfrak{S}\mu^2 = \frac{1-\mathfrak{S}'2\mu}{2}$$

$$\mathfrak{S}'\mu^2 = \frac{1+\mathfrak{S}'2\mu}{2}$$

$$\mathfrak{S}\mu\mathfrak{S}'\mu = \frac{\mathfrak{S}2\mu}{2}$$

Man

Man setze diese Werthe in die Formel, und der Kürze halben setze man noch

$$P = \frac{(m^2+n^2u^2)p+2mn(1-u^2)q+(n^2+m^2u^2)r}{-2t^2u^3}$$

$$Q = \frac{(m^2-n^2u^2)p+2mn(1+u^2)q+(n^2-m^2u^2)r}{-2t^2u^3}$$

$$R = \frac{mn(p-r)+(u^2-m^2)q}{-t^2u^2}$$

so bekömmt man

$$\frac{1}{\varrho} = P + Q\,\mathfrak{S}'\,2\mu + R\,\mathfrak{S}\,2\mu$$

Zusatz. Die Gestalt, welche wir dem Halbmesser der Krümmung gegeben haben, giebt uns einige wichtige Bemerkungen an die Hand.

Es seyen f, f' und f'' die Halbmesser der Krümmung für drei Schnitte die auf der krummen Fläche senkrecht stehen, und die mit dem Hauptschnitte die Winkel μ, μ' und μ'' machen, so bekömmt man diese drei Gleichungen

$$\frac{1}{f} = P + Q\mathfrak{S}'\,2\mu + R\mathfrak{S}\,2\mu$$

$$\frac{1}{f'} = P + Q\,\mathfrak{S}'\,2\mu' + R\,\mathfrak{S}\,2\mu'$$

$$\frac{1}{f''} = P + Q\,\mathfrak{S}'\,2\mu'' + R\,\mathfrak{S}\,2\mu''$$

vermittelst welcher man P, Q, und R kennen kann. Verlangete man hernach den Halbmesser der Krümmung für einen anderen Schnitt der auch auf der Fläche senkrecht

wäre

wäre, und mit dem Hauptschnitte den Winkel Σ machte, so werde man ihn finden, indem man in der Formel

$$\frac{1}{\rho} = P + Q\mathfrak{S}'2\Sigma + R\mathfrak{S}2\Sigma$$

anstatt P, Q und R deren Werthe setzet. Daher folget, daß, so bald die Halbmesser der Krümmung gegeben sind für drei senkrechte Schnitte, man allemal den Halbmesser der Krümmung für jeden anderen senkrechten Schnitt finden kann.

Zweitens ist es klar, daß der größte und kleinste dieser Halbmesser gefunden werden, wenn man das Differenzial von $P + Q\mathfrak{S}'2\mu + R\mathfrak{S}2\mu$ null machet, indem man den Winkel μ als veränderlich betrachtet, daher wird

$$-Q\mathfrak{S}2\mu + R\mathfrak{S}'2\mu = o$$

$$-Q\frac{\mathfrak{S}2\mu}{\mathfrak{S}'2\mu} + R = o$$

$$-\frac{\mathfrak{S}2\mu}{\mathfrak{S}'2\mu} + \frac{R}{Q} = o, \quad \mathfrak{T}2\mu = \frac{R}{Q}$$

Die Tangente eines Winkels ist zugleich die Tangente des nemlichen Winkels, wenn er um den halben Umkreis vergrößert wird. Wenn wir also durch g den Winkel a deuten, dessen Tangente $= \frac{R}{Q}$, so hat man

$$2\mu = \mathfrak{AT}\frac{R}{Q} = g \text{ und } = g + 180°$$

$$\mu = \frac{g}{2} \text{ und } = \frac{g + 180°}{2} = \frac{g}{2} + 90°$$

Daher

Daher siehet man, daß die beiden Schnitte, wovon der eine die größte und der andere die kleinste Krümmung hat, nothwendig senkrecht gegen einander sind.

Drittens, wenn der Halbmesser $\frac{1}{P+Q}$ des Hauptschnittes ein Maximum oder Minimum ist, so wird der Halbmesser der Krümmung für einen anderen Schnitt, der mit demselben den Winkel μ machet, $\frac{1}{P+QS'2\mu}$; sonst könnte der Halbmesser der Krümmung für den Schnitt, der mit demselben einen Winkel von 90° machet, kein Maximum oder Minimum seyn.

Es seyen f und g die Halbmesser der Krümmung für den Hauptschnitt, und für denjenigen, der gegen ihn senkrecht ist, so bekömmt man diese beiden Gleichungen

$$\frac{1}{f} = P + Q$$

$$\frac{1}{g} = P - Q$$

woraus man ziehet $P = \frac{g+f}{2fg}$, $Q = \frac{g-f}{2fg}$

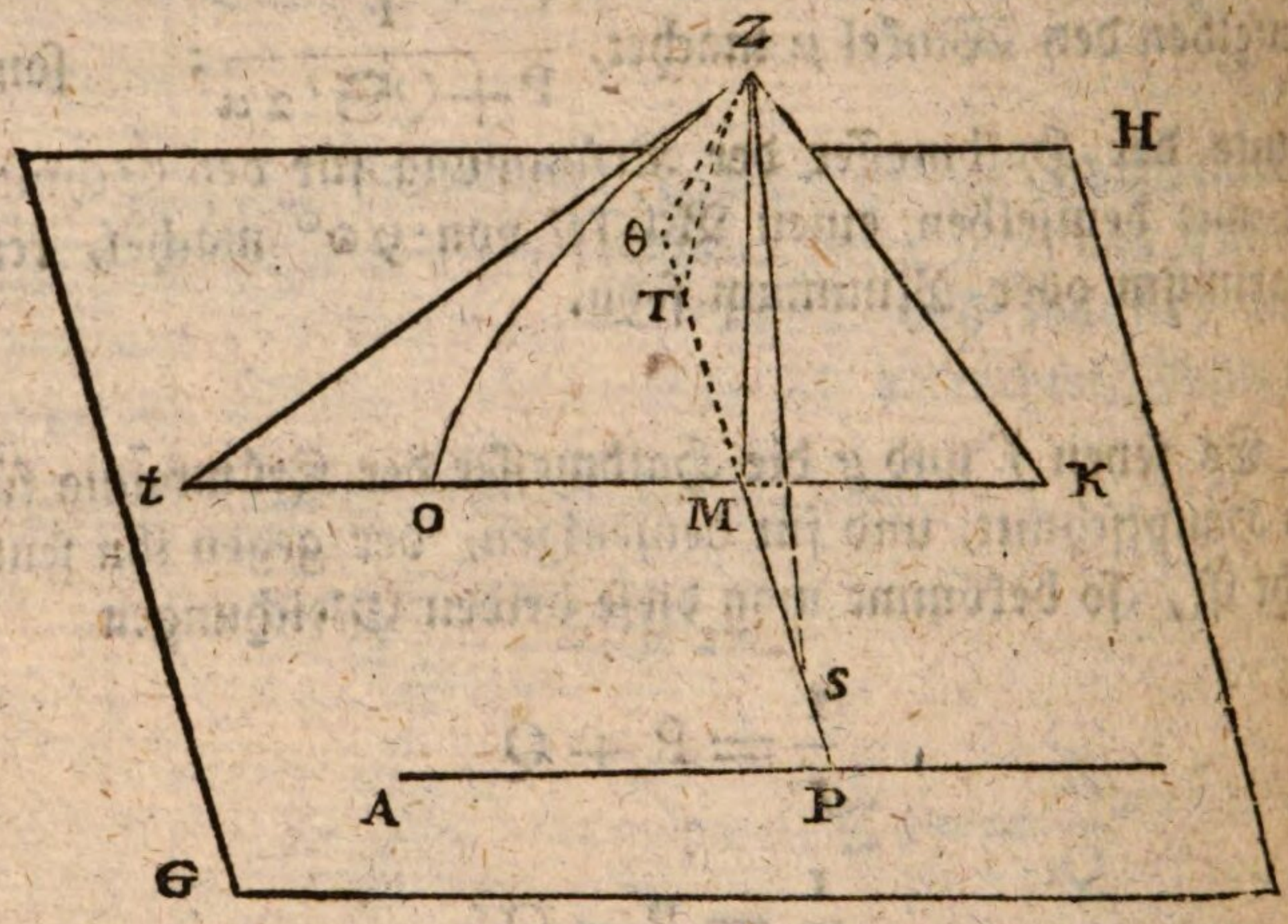
Sind nun f und g ein Maximum und ein Minimum, so kömmt für den Halbmesser jedes senkrechten Schnittes, der mit dem Hauptschnitte einen Winkel μ machet,

$$\frac{2fg}{f+g-(f-g)S'2\mu}$$

§. 12.

Aufgabe.

Den Punkt bestimmen, wo die Ebne, welche die krumme Fläche berühret, mit der Ebne GH parallel ist.



Auf den Krümmungen beider Schnitte MZO und MZT ziehe man die Tangenten Zt und $Z\theta$. Es ist klar, daß die Ebne $tZ\theta$ die krumme Fläche im Punkte Z berühren muß. Die Tangenten Zt und $Z\theta$ machen mit den Linien, worauf x und y genommen werden, die Winkel MtZ und $M\theta Z$, und die Tangenten dieser Winkel sind $\frac{dz}{dx} = n$ und $\frac{dz}{dy} = m$. Beide Winkel sind null, wenn die Ebne $tZ\theta$ mit der Ebne GAC parallel ist. Um also den Punkt zu bestimmen, wo die Ebne, welche die krumme Fläche berühret, mit der Ebne GH parallel ist, so hat man

beide

beide Gleichungen $n = o$ und $m = o$. Allemal wenn die Funkzion z ein Maximum oder Minimum ist, so finden diese beide Gleichungen Statt. Aber wenn diese beide Gleichungen Statt finden, so folget nicht allemal daraus, daß die Funkzion ein Maximum oder Minimum sey.

Es wäre zu weitläuftig, dieses hier zu beweisen. Herr de la Grange hat es im ersten Bande der Mémoires de Turin gethan. Wir begnügen uns damit, daß wir dem Leser den Weg gezeiget haben, nach welchem krumme Flächen behandelt werden.

Achtzehntes Hauptstück.

Von Linien die einander berühren, oder schneiden.

§. 1.

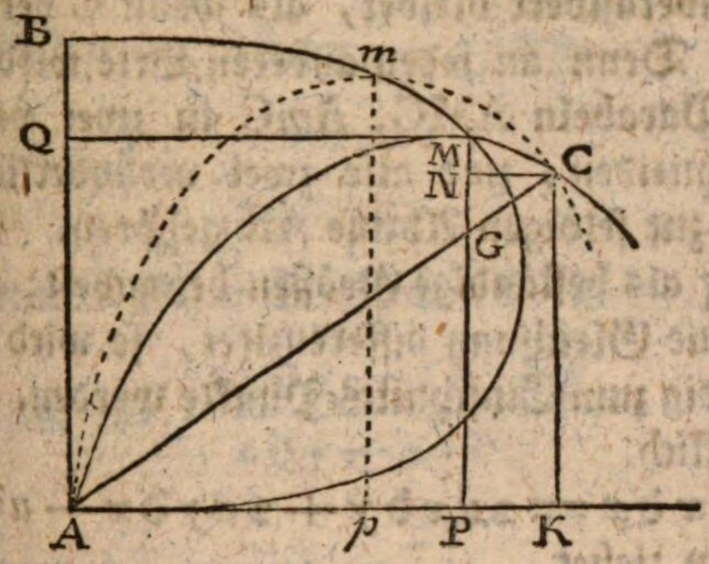
Die Geometrie ist an Aufgaben unerschöpflich. Ihre Grundbegriffe lassen sich auf unendlich viel Arten verknüpfen, so daß jedesmal eine andere Lehre oder eine neue Frage herauskömmt. Jedoch beschäftigen sich die Geometer hauptsächlich mit solchen Aufgaben, von welchen einiger Nutzen zu hoffen ist. Hierher gehören diejenigen, welche sich auf Linien beziehen, die einander schneiden, oder berühren; weil sie in der Mechanik ihre Anwendung finden. Da wir übrigens vermuthen können, daß der Leser, welcher bis hierher gekommen ist, schon ziemlich mit unendlich kleinen Größen umzugehen weiß, und auch schon genugsam eingesehen hat, was eigentlich dabei gedacht werden muß, so wollen wir uns jezt kürzer fassen, so daß wir manches dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen. Wir folgen meistens bei diesen Aufgaben, dem Marquis de l'Hopital in seiner Analyse des infinement petits.

§. 2.

Aufgabe.

Es ist gegeben eine Linie AMB, wovon AP die Direktrize ist. Man stelle sich unendlich viel Parabeln

Parabeln vor, wie AMC, A*m*C, die alle durch den Punkt A gehen, und deren Axen mit den Applikaten PM, *pm* einerlei sind. Es soll die krumme Linie gefunden werden, welche alle diese Parabeln berühret.



Auflösung. Der Berührungspunkt für jede Parabel AMC ist nichts anders als der Punkt C, wo diese Parabel AMC von der folgenden A*m*C, welche unendlich nahe ist, geschnitten wird. Dieses voraus gesetzet, so ziehe man CK mit MP parallel. Es seyen AP $= x$, PM $= y$, deren Verhältniß bekannt ist. Es seyen AK $= u$, KC $= z$, deren Verhältniß unbekannt ist. Die Eigenschaft der Parabel giebt

$$(AP)^2 : (NC)^2 :: MP : MN$$

oder $$(AP)^2 : (PK)^2 :: MP : (MP - CK)$$

$$x^2 : (u-x)^2 :: y : (y-z)$$

$$x^2 : (u^2 - 2ux + x^2) :: y, (y-z)$$

daher $$x^2y - x^2z = u^2y - 2uxy + x^2y$$

$$-x^2z = u^2y - 2uxy$$

$$x^2z = 2uxy - u^2y$$

Diese Gleichung ist allen Parabeln wie AMC gemein. Nun betrachte man, daß die unbekannten Koordinaten AK (u) und KC (z) unverändert bleiben, unterdessen, daß AP (x) und PM (y) verändert werden, und sich in Ap und pm verwandeln; und daß KC (z) unter keiner andern Bedingung unverändert bleibet, als wenn C der Schneidepunkt ist. Denn an jeden anderen Orte wird die gerade KC beide Parabeln AMC, AmC in zwei verschiedenen Punkten schneiden, und also zwei veränderliche Werthe haben, die zur selbigen Abzisse AK gehören. Wenn man also u und z als beständige Größen behandelt; indem man die gefundene Gleichung differenziret, so wird der Punkt C nothwendig zum Einschnitts-Punkte werden. Man bekömmt folglich

$$2zx\,dx = 2ux\,dy + 2uy\,dx - u^2\,dy,$$

woraus man ziehet,

$$AK\,(=u) = \frac{2x^2\,dy - 2yx\,dx}{x\,dy - 2y\,dx}$$

wenn man nemlich anstatt z dessen Werth $\frac{2uxy - u^2y}{x^2}$ setzet. Und da die Beschaffenheit der Linie AMB bekannt ist, so findet man für dy eine Funkzion von dx, welche, wenn sie im Werthe der AK gesetzet wird, einen Ausdruck giebt, worinn keine Differenziale mehr vorhanden sind.

Wenn man anstatt der Parabeln andere Linien annehmen wollte, deren Lage bestimmet wäre, so würde die Auflösung auf eine ähnliche Art geschehen.

Exempel. Es sei AMB eine halbe Ellipse, deren kleine Axe $= AB = a$, und deren große Axe $= 2a$, so wäre die Gleichung aus dem Mittelpunkte auf der großen Axe

$$y'^2 = \frac{a^2}{4a^2}(a^2 - x^2)$$

$$4y'^2 = a^2 - x^2$$

Es

Es sind aber hier die Applikaten y um $\frac{1}{2}a$ vergrößert, so daß $y' + \frac{1}{2}a = y$, oder $y' = y - \frac{1}{2}a$, folglich $y'^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$ und $4y'^2 = 4y^2 - 4ay + a^2$. Wenn man substituiret, so kömmt $4y^2 - 4ay = -x^2$,

oder $$x^2 = 4ay - 4y^2$$

folglich $$x\,dx = 2a\,dy - 4y\,dy$$

$$dy = \frac{x\,dx}{2a - 4y}$$

Substituiret man diesen Werth von dy in

$$AK = \frac{2x^2\,dy - 2xy\,dx}{x\,dy - 2y\,dx}$$

so kömmt $AK\,(= u) = \frac{ax}{y}$

Hieraus folget, daß man für AK die vierte Proporzional-Linie zu MP (y), PA (x) und AB (a) nehmen, und senkrecht auf AK errichten muß, wenn KC die Parabel AMC im verlangten Punkte C schneiden soll.

Um nun die Natur der krummen Linie zu finden, welche alle Parabeln berühret, oder, welche durch alle Punkte wie C gehet, so muß eine Gleichung gefunden werden zwischen AK $(= u)$ und KC $(= z)$. In der Gleichung

$$zx^2 = 2uxy - u^2y$$

setze man für u dessen Werth $\frac{ax}{y}$, so kömmt

$$y = \frac{a^2}{2a - z}$$

$$\text{folglich } x\left(= \frac{uy}{a}\right) = \frac{au}{2a - z}$$

Diese Werthe von x und y setze man in die Gleichung

$$x^2 = 4ay - 4y^2$$

so kömmt

$$u^2 = 4a^2 - 4az$$

eine Gleichung, wo x und y nicht mehr vorhanden sind, und welche die Beziehung zwischen AK und KC ausdrücket. Hieraus erkennet man, daß die verlangte krumme Linie eine Parabel ist; deren Axe ist BA, der Scheitel B, der Brennpunkt A, und der Parameter folglich 4AB.

Zusatz *I.* Man hat gefunden $y = \frac{a^2}{2a - z}$, daher $KC(=z) = \frac{2ay - a^2}{y}$. Folglich wird KC positiv, wenn $2y > a$; negativ, wenn $2y < a$, und null, wenn $2y = a$. Daraus muß man schließen, daß im ersten Falle der berührende Punkt C über AP, (wie es bei der Rechnung angenommen worden), im zweiten Falle unter AP, und im dritten in AP fällt.

Zusatz *II.* Man ziehe die gerade AC, welche MP in G schneiden wird, so wird MG = BQ, und der Punkt G ist der Brennpunkt der Parabel AMC.

Erstlich ist AK : KC :: AP : PG

$$\frac{ax}{y} : \frac{2ay - a^2}{y} :: x, PG(=2y - a)$$

folglich $MG = y - PG = a - y$

Es ist aber $BQ = BA - AQ = BA - PM = a - y$
also $MG = BQ$

Zweitens, wenn p der Parameter der Parabel AMC ist, so hat man

$(AP)^2$

$$(AP)^2 = p \times (PM)$$

$$x^2 = py$$

$$\frac{xx}{y} = p$$

oder, weil $xx = 4ay - 4y^2$ so ist

$$4a - 4y = p$$

folglich, da $MG = a - y$, so ist MG der vierte Theil des Parameters, und daraus folget, daß G der Brennpunkt der Parabel ist. Sollte demnach für den Punkt A die Tangente der Parabel AMC gezogen werden, so müßte der Winkel BAC halbiret werden.

Zusatz *III.* Weil der Parameter der Parabel AMC $= 4BQ (= 4MG)$ ist, so folget, daß, wenn der Scheitel M in A fällt, alsdann der Parameter der Parabel, die ihren Scheitel in A hat, 4AB ausmachen werde. Hieraus folget ferner, daß in diesem Falle die Parabel, die durch alle Punkte wie C gehet, diejenige, welche ihren Scheitel in A hat, nicht anders als in einer unendlichen Entfernung berühren kann, oder daß die eine die Asymptote der anderen ist. Denn da beide Parabeln einerlei Parameter $4a$ haben, so sey $v^2 = 4at$ die Gleichung der inwendigen, die ihren Scheitel in A hat. Folglich ist $v'^2 = 4a(a+t)$ oder $v'^2 = 4a^2 + 4at$ die Gleichung der Parabel BC. Also ist

$$v' - v = \sqrt{(4a^2 + 4at)} - \sqrt{(4at)}$$

Dieser Unterschied beider Applikaten kann nicht anders verschwinden, als wenn t unendlich wird. In diesem Falle verschwindet $4a^2$ neben $4at$, und es wird

$$v' - v = \sqrt{(4at)} - \sqrt{(4at)} = 0$$

Also nur in einer unendlichen Entfernung wird $v' - v = o$, oder $v' = v$, so daß beide Parabeln in einem Punkte zusammen treffen.

Zusatz *IV.* Weil die Parabel BC alle Parabeln wie AMC berühret, so ist leicht einzusehen, daß alle diese Parabeln die bestimmte Linie AC in Punkten schneiden werden, die dem Punkte A näher liegen werden, als C. Es wird aber in der Mechanik bewiesen, daß, wenn AK horizontal ist, alle Parabeln wie AMC die Bahnen anzeigen, welche in der Luft von Bomben beschrieben wird, welche aus einem Mörser in A unter allen möglichen Winkel mit der Horizontal-Linie, mit gleicher Geschwindigkeit geworfen werden. Die Richtung des Mörsers in A ist allemal die Tangente der Parabel. Wenn man also eine gerade Linie ziehet, welche den Winkel BAC halbiret, so zeiget sie die Richtung an, welche man dem Mörser geben muß, um daß die Bombe auf den möglichst weitesten Punkt C auf einer der Lage nach gegebenen Ebne AC, erreiche.

Wenigstens müßte dieses genau eintreffen, wenn die Luft der Kugel keinen merklichen Widerstand machte. Da aber bei einer großen Geschwindigkeit der Widerstand der Luft sehr beträchtlich ist, so sind die Laufbahnen der Kugeln keine Parabeln, sondern ganz andere krumme Linien. Jedoch, wenn die Geschwindigkeit des aus A geworfenen Körpers nicht sehr groß ist, so entfernet sich seine Bahn nicht viel von der Parabel.

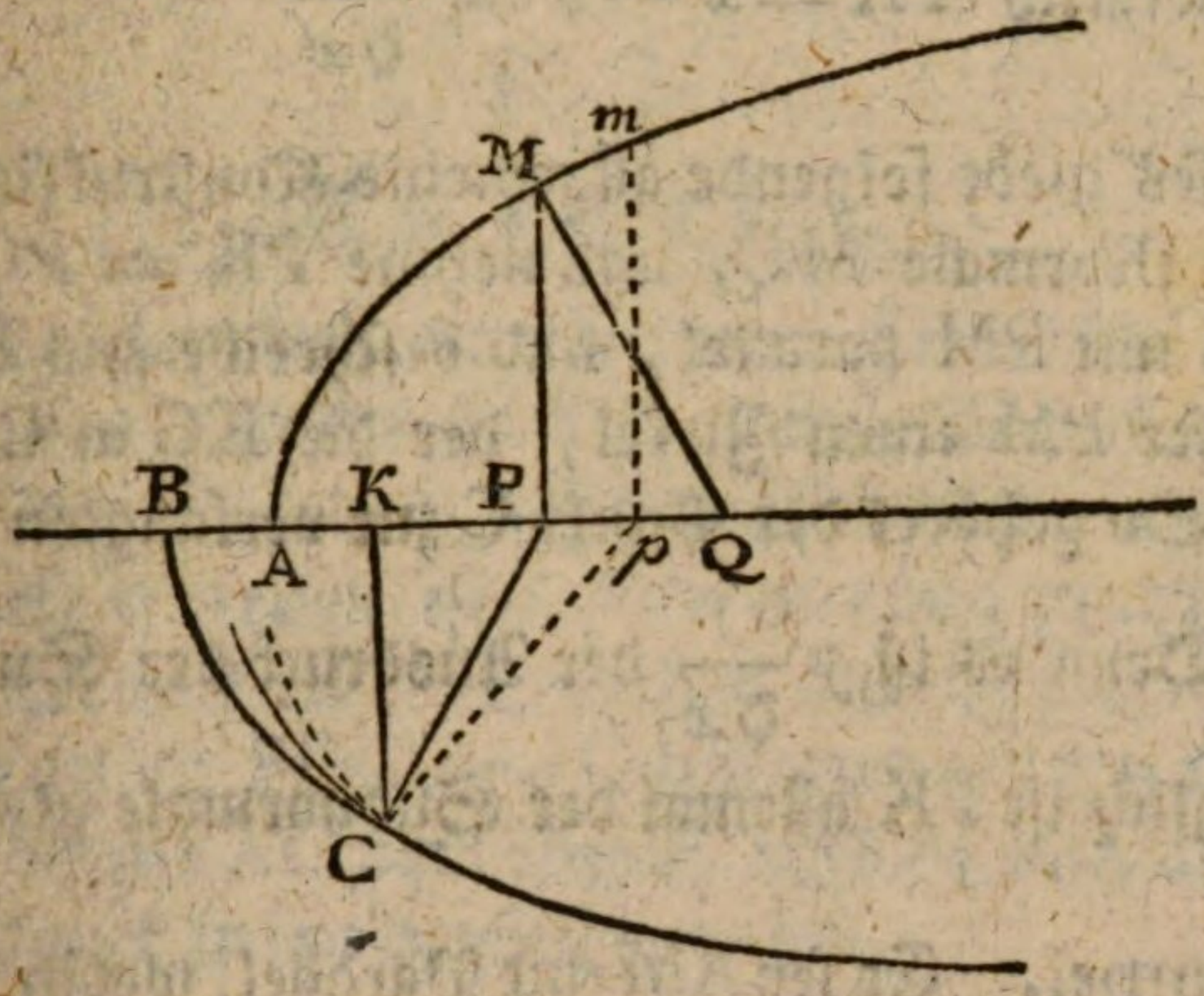
Dieses haben wir nur gelegentlich angeführet, da es eigentlich zur Mechanik gehöret.

§. 3.

Aufgabe.

Es sey gegeben eine krumme Linie AM, welche über der Axe AP beschrieben ist. Es soll eine andere

dere krumme Linie BC gefunden werden, so daß allemal PM = PC, wenn PM eine Applikate der Linie AM, und PC auf der Linie BC senkrecht ist.



Auflösung. Man stelle sich unendlich viel Zirkel vor, die aus den Mittelpunkten P, *p*, mit den Halbmessern PC = PM, *p* C = *p m* beschrieben sind. So ist leicht einzusehen, daß die verlangte Linie diese Zirkel berühren muß, und daß der berührende Punkt C jedes Zirkels zugleich derjenige Punkt ist, wo der mit dem Halbmesser PC beschriebene Zirkel von dem unendlich nahen mit dem Halbmesser *p* C beschriebenen Zirkel, geschnitten wird.

Man fälle CK senkrecht auf AP. Es sey AP = x, PM (= PC) = y, AK = u, KC = z, so giebt die Eigenschaft des Zirkels oder des rechtwinklichen Dreiecks, $(PC)^2 = (PK)^2 + (KC)^2$, das heißt

$$y^2 = (x - u)^2 + z^2$$

oder

$$y^2 = x^2 - 2ux + u^2 + z^2$$

welche Gleichung allen diesen Zirkeln gemein ist. Differenziret man diese Gleichung, und betrachtet u und z als beständige Größen, so ist

$$2y\,dy = 2x\,dx - 2u\,dx$$

$$y\,dy = (x-u).\,dx$$

$$\text{folglich } PK = x - u = \frac{y\,dy}{dx}$$

Dieses giebt folgende allgemeine Konstrukzion. Man ziehe die Normale MQ, und nehme PK = PQ. Man ziehe KC mit PM parallel, und beschreibe aus P mit dem Halbmesser PM einen Zirkel, der die KC in C schneiden wird. So gehöret der Punkt C zur verlangten krummen Linie. Denn es ist $y\frac{dy}{dx}$ der Ausdruck der Subnormale PQ, folglich ist PK allemal der Subnormale gleich.

Exempel. Es sey AM eine Parabel, worin $yy = ax$, so ist in derselben die Subnormale PQ dem halben Parameter gleich. Also auch $PK(=PQ) = \frac{1}{2}a$, oder $x - u = \frac{1}{2}a$ oder $x = \frac{1}{2}a + u$

Ferner giebt das rechtwinkliche Dreieck PKC, $PC^2 = (PK)^2 + (KC)^2$ oder $y^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + z^2$ oder $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + z^2$ Schreibet man diese Werthe von x und y^2 in der Gleichung $y^2 = ax$, so kömmt

$$\frac{1}{4}a^2 + z^2 = a(\tfrac{1}{2}a + u)$$

$$\frac{1}{4}a^2 + z^2 = \frac{1}{2}a^2 + au$$

$$z^2 = \frac{1}{4}a^2 + au$$

$$z^2 = a(\tfrac{1}{4}a + u)$$

Es sey $\frac{1}{4}a + u = t$, so ist

$$z^2 = at$$

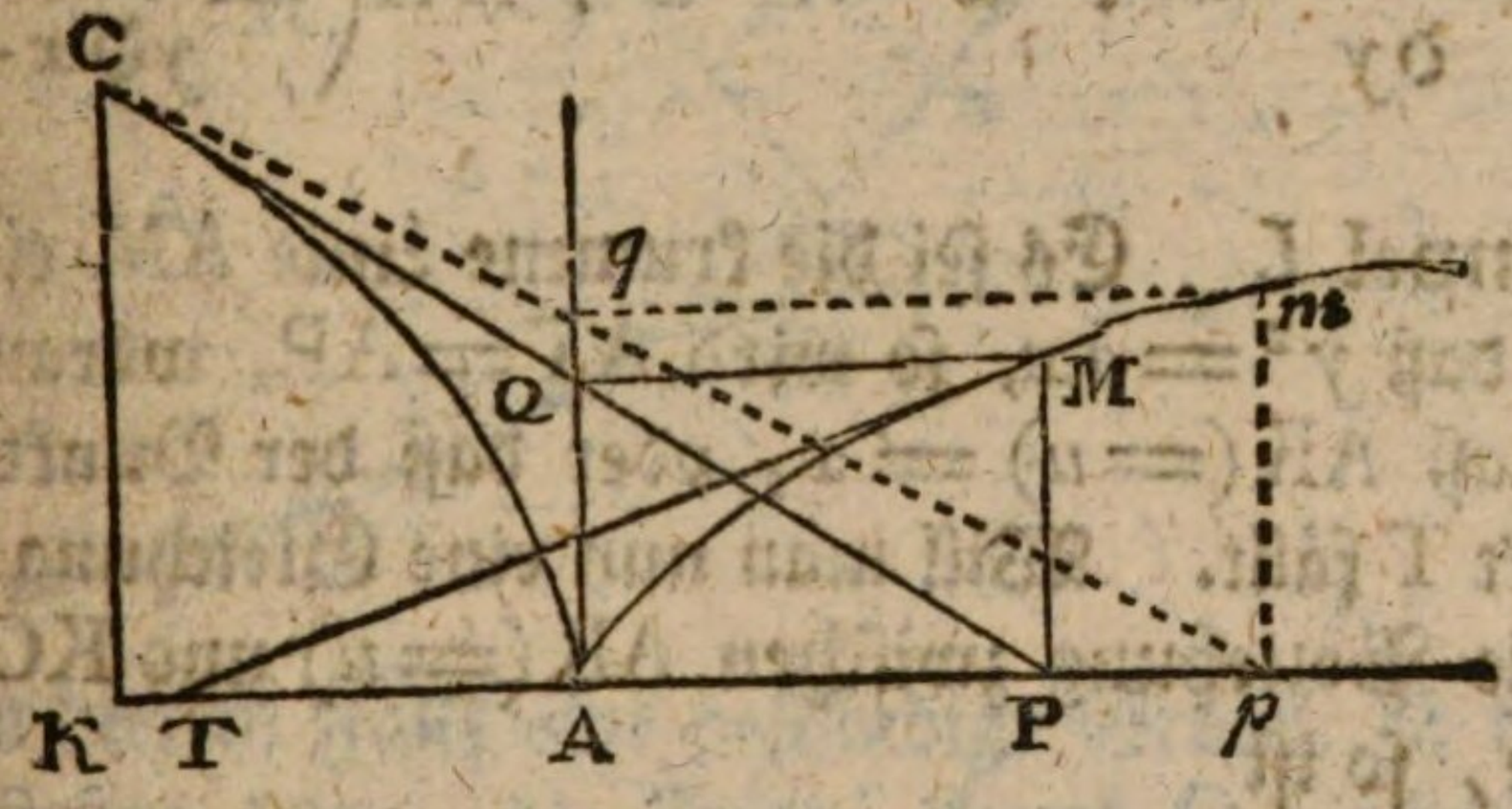
Dieses ist die Gleichung der krummen Linie BC, und bei einer geringen Aufmerksamkeit siehet man, daß es die

nemliche Parabel ist als AM, nur daß der Scheitel B um $\frac{1}{4}a$ weiter fortgerücket ist. Denn beide Parabeln haben den nemlichen Parameter, und sind folglich vollkommen gleich.

§. 4.

Aufgabe.

Es sey gegeben eine krumme Linie AM über ihrer Axe oder Direktrize AP, deren Applikaten PM, *pm* mit der geraden AQ parallel sind, welche der Lage nach gegeben ist. Es werden gezogen MQ, *mq* parallel mit AP. Durch P und Q, *p* und *q* seyen gerade Linien PQC, *pq*C gezogen. Es wird die krumme Linie AC verlanget, welche von allen diesen geraden Linien berühret wird.



Auflösung. Man nehme an, es sey die Tangente *pq*C der PQC unendlich nahe, und durch den Punkt C, wo sie einander schneiden, ziehe CK mit AQ parallel. Es sey AP $= x$, PM $(=$ AQ$) = y$, AK $= u$, KC $= z$. Die ähnlichen Dreiecke PAQ, PKC geben

$$\text{AP} : \text{AQ} :: \text{PK} : \text{KC}$$
$$x, \quad y \quad :: (x+u) : z$$

Also ist $z = y + \frac{uy}{x}$

welche

welche Gleichung zu allen geraden Linien wie KC gehöret. Wenn man annimmt, daß z und u unverändert bleiben,

so ist $$o = \partial y + \frac{u x \partial y - u y \partial x}{x^2}$$

daher $$AK = u = \frac{x^2 \partial y}{y \partial x - x \partial y}$$

Dieses giebt folgende allgemeine Konstrukzion.

Man ziehe die Tangente MT, und nehme AK gleich der dritten Proporzional-Linie zu AT und AP. Man ziehe KC parallel mit AQ, so wird diese KC, die PQC in einem Punkte C schneiden, der zur verlangten Linie gehöret.

Denn es ist $AT = PT - AP = \frac{y \partial x}{\partial y} - x = \frac{y \partial x - x \partial y}{\partial y}$

Wenn nun $AT : AP :: AP : AK$

so ist $\frac{y \partial x - x \partial y}{\partial y} : x :: x : AK \left(= \frac{x^2 \partial y}{y \partial x - x \partial y} \right)$

Exempel I. Es sei die krumme Linie AM eine Parabel, so daß $y^2 = ax$, so wird $AT = AP$, woraus dann folget, daß $AK (= u) = x$, oder daß der Punkt K auf den Punkt T fällt. Will man nun eine Gleichung haben, welche die Beziehung zwischen $AK (= u)$ und $KC (= z)$ ausdrücke, so ist

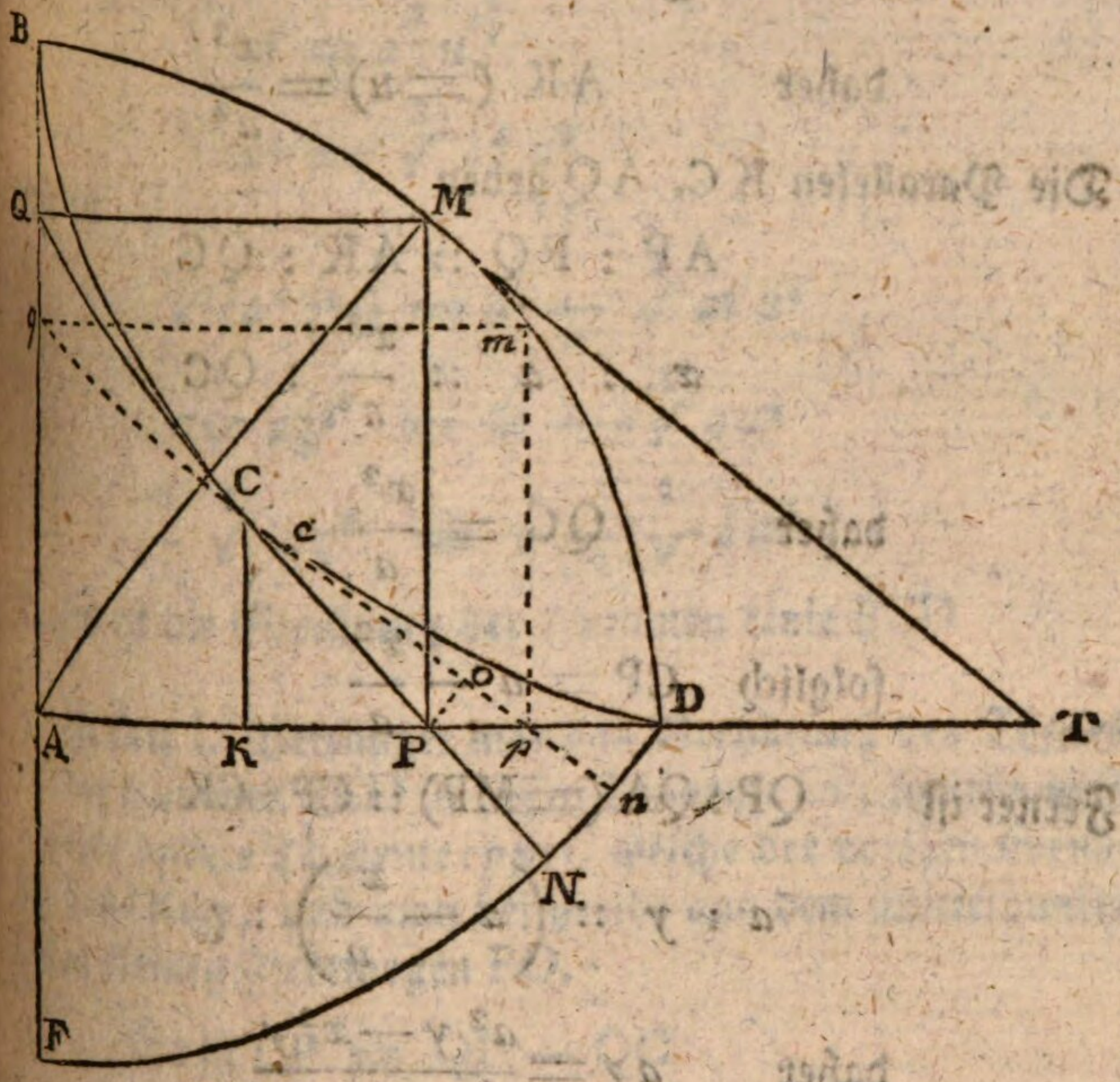
$$AP : AQ :: KP : KC$$

oder $$x, \quad y :: 2x, \quad KC (= z = 2y)$$

Anstatt x schreibe man demnach u, und anstatt y schreibe man $\frac{1}{2} z$ in der Gleichung $y^2 = ax$, so hat man $\frac{1}{4} z^2 = au$ oder $z^2 = 4au$. Daraus siehet man, daß in diesem Falle die Linie AC wiederum eine Parabel ist, welche ihren Scheitel in A hat, und deren Parameter viermal so groß ist als der Parameter der Parabel AM.

Exem-

Exempel *II.* Es sei die gegebene krumme Linie ein Viertelzirkel BMD, dessen Mittelpunkt in A ist, und welcher AB oder AD oder AM (= *a*) zum Halbmesser hat, so ist PQ allemal dem Halbmesser AM gleich, das heißt



PQ ist in diesem Falle eine beständige Größe, so daß man sich vorstellen kann, die Enden P und Q der beständigen PQ gleiten längs den Seiten AB und AD des rechten Winkels BAD. In diesem Falle bekömmt man AK (= *u*) $= \frac{x^3}{a^2}$,

Denn es ist erstlich

$$AP : AM :: AM : AT$$
$$x : a :: a : AT$$

daher $$AT = \frac{a^2}{x}$$

Ferner

Ferner ist, vermöge der obigen Auflösung,

$$AT : AP :: AP : AK$$

$$\frac{a^2}{x}, \quad x \quad :: \quad x, \quad AK$$

daher $$AK\ (=u) = \frac{x^3}{a^2}$$

Die Parallelen KC, AQ geben

$$AP : PQ :: AK : QC$$

$$x \ : \ a \ :: \ \frac{x^3}{a^2} \ : \ QC$$

daher $$QC = \frac{x^2}{a}$$

folglich $$CP = a - \frac{x^2}{a}$$

Ferner ist $$QP : QA\ (=MP) :: CP : CK$$

$$a : y :: \left(a - \frac{x^2}{a}\right) : z$$

daher $$az = \frac{a^2 y - x^2 y}{a}$$

oder $$a^2 z = a^2 y - x^2 y$$

$$a^4 z^2 = a^4 y^2 - 2 a^2 x^2 y^2 + x^4 y^2$$

Der Zirkel BMD giebt

$$a^2 - x^2 = y^2$$

setzet man diesen Werth von y^2 in die vorige Gleichung, so kömmt $a^4 z^2 = a^6 - 3 a^4 x^2 + 3 a^2 x^4 - x^6$

oder $$a^4 z^2 = (a^2 - x^2)^3$$

oder $$\sqrt[3]{(a^4 z^2)} = a^2 - x^2$$

Es

Es ist aber $u = \frac{x^3}{a^2}$ oder $x^3 = a^2 u$

daher $x = a^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}}$

$x^2 = a^{\frac{4}{3}} u^{\frac{2}{3}}$

$x^2 = \sqrt[3]{a^4 u^2}$

Also ist

$$\sqrt[3]{(a^4 z^2)} = a^2 - \sqrt[3]{a^4 u^2}$$

$$a\sqrt[3]{a z^2} = a^2 - a\sqrt[3]{a u^2}$$

$$\sqrt[3]{a z^2} = a - \sqrt[3]{a u^2}$$

Dieses ist die Gleichung der krummen Linie BCD

Zusatz I. Verlanget man das Verhältniß des Theiles DC der krummen BCD zu dessen Tangente CP, so stelle man sich eine andere Tangente *cp* vor, welche der vorigen unendlich nahe liege, und man beschreibe aus dem Mittelpunkte C den kleinen Zirkelbogen PO.

Es ist $CP = QP - QC$

$$= a - \frac{x^2}{a}$$

$$= \frac{a^2 - x^2}{a}$$

Nun ist $cp - CP$ oder $Op - Cc = \delta CP = \delta\left(\frac{a^2 - x^2}{a}\right)$

$= \frac{-2x\delta x}{a}$. Da nun $Op - Cc = -\frac{2x\delta x}{a}$, so ist

$Cc = Op + \frac{2x\delta x}{a}$

Man betrachte nun den kleinen Bogen OP als eine gerade Linie, die auf *cp* senkrecht stehet, so ist $\triangle PpO \sim \triangle qpA$, weil beide einen rechten Winkel, und einen gemeinschaftlichen in *p* haben. Weil aber $\triangle qpA$ gar wenig von $\triangle QPA$ verschieden ist, so ist auch $\triangle PpO$ als dem $\triangle QPA$ ähnlich zu betrachten. Folglich ist

$$PQ : AP :: Pp : Op$$

$$a : x :: dx : Op \left(= \frac{x\,dx}{a}\right)$$

Darum $Cc = Op + \frac{2x\,dx}{a}$ und $Op = \frac{x\,dx}{a}$, so ist

$Cc = \frac{3x\,dx}{a}$ oder

$$DC - Dc = \frac{3x\,dx}{a}$$

da nun $CP - cp = \frac{2x\,dx}{a}$

so ist $(DC - Dc) : (CP - cp) :: 3 : 2$

das heißt, das Differenzial von DC verhält sich zum Differenziale von CP, wie 3 zu 2, folglich verhält sich auch

$$DC : CP :: 3, 2$$

Folglich verhält sich auch die ganze krumme Linie DCB zu ihrer Tangente BA wie 3 zu 2

Zusatz II. Wenn man die krumme Linie BCD entwickelt, und bei D den Anfang machet, so entstehet eine krumme Linie DNF, und es wird seyn

$$CN : CP :: 3 : 2$$

weil CN allemal dem Theile CD der krummen BCD gleich ist. Daraus folget ferner, daß die ähnlichen Ausschnitte

schnitte CN*n*, CPO sich verhalten, wie 9 zu 4. Es ist aber CN*n* das Element des Raumes DCN, zwischen den krummen Linien DC, DN, und der geraden CN, welche die CD in C berühret, und auf DN in N senkrecht stehet. Hingegen ist CPO das Element des Raumes DCP, zwischen der krummen CD und beiden Tangenten DP, CP. Folglich verhält sich jener Raum DCN zu diesen DCP, wie 9 zu 4.

Zusatz III. Es wird in der Mechanik bewiesen, daß der Mittelpunkt der Schweere eines Zirkel-Ausschnittes so lieget, daß seine Entfernung vom Mittelpunkte $\frac{2}{3}$ des Halbmessers ausmache. Es kann aber der kleine Bogen *Nn* als ein Zirkelbogen betrachtet werden, und folglich der Ausschnitt CN*n* als ein Zirkel-Ausschnitt. Der Mittelpunkt der Schweere desselben lieget also im Bogen PO, weil $CP = \frac{2}{3} CN$. Und da der Bogen PO unendlich klein ist, so liegt der gedachte Mittelpunkt in der geraden Linie AD. Da nun die Räume DCN, DBF aus lauter solchen Zirkel-Ausschnitten bestehen, so lieget ihr Mittelpunkt der Schweere in der geraden AD. Wenn man also jenseit der BF eine Figur beschriebe, die mit BDF vollkommen ähnlichgleich wäre, so würde der Mittelpunkt der Schweere der ganzen Figur auf den Punkt A fallen.

Zusatz IV. Wegen der ähnlichen rechtwinklichen Dreiecke PQA, *p*PO hat man

$$PQ : AQ (= PM) :: Pp : PO$$

$$a : \sqrt{(a^2 - x^2)} :: dx : PO,$$

$$\text{daher } PO = \frac{dx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}.$$

Ferner geben die ähnlichen Ausschnitte CPO, CN*n*

$$CP : CN :: PO : N\,n$$

$$2 : 3 :: PO : N\,n$$

$$2 : 3 :: \frac{dx\sqrt{(a^2-x^2)}}{a} : N\,n$$

$$\text{daher } N\,n = \frac{3\,dx\sqrt{(a^2-x^2)}}{2\,a}$$

Nun bestehet der Zirkel-Abschnitt DMP aus lauter Elementen wie PM*mp*, wovon jedes gleich ist $MP \times Pp = dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Man multiplizire N*n* mit $AB = a$, so kömmt

$$AB \times N\,n = \tfrac{3}{2}\,dx\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$AB \times N\,n = \tfrac{3}{2}\,(MP \times Pp)$$

Hieraus folget, daß der Theil ND der krummen DNF, wenn man ihn mit dem Halbmesser AB multiplizirt, anderthalb mal so groß ist als der Zirkel-Abschnitt DMP; folglich ist auch

$$D\,F \times A\,B = \tfrac{3}{2}\,D\,B\,A$$

Es ist aber der Viertel-Zirkel $DBA = BMD \times \frac{1}{2}AB$, also

$$DF \times AB = \tfrac{3}{2}\,(\tfrac{1}{2}AB \times BMD)$$

$$DF \times AB = \tfrac{3}{4}\,AB \times BMD$$

$$D\,F = \tfrac{3}{4}\,B\,M\,D$$

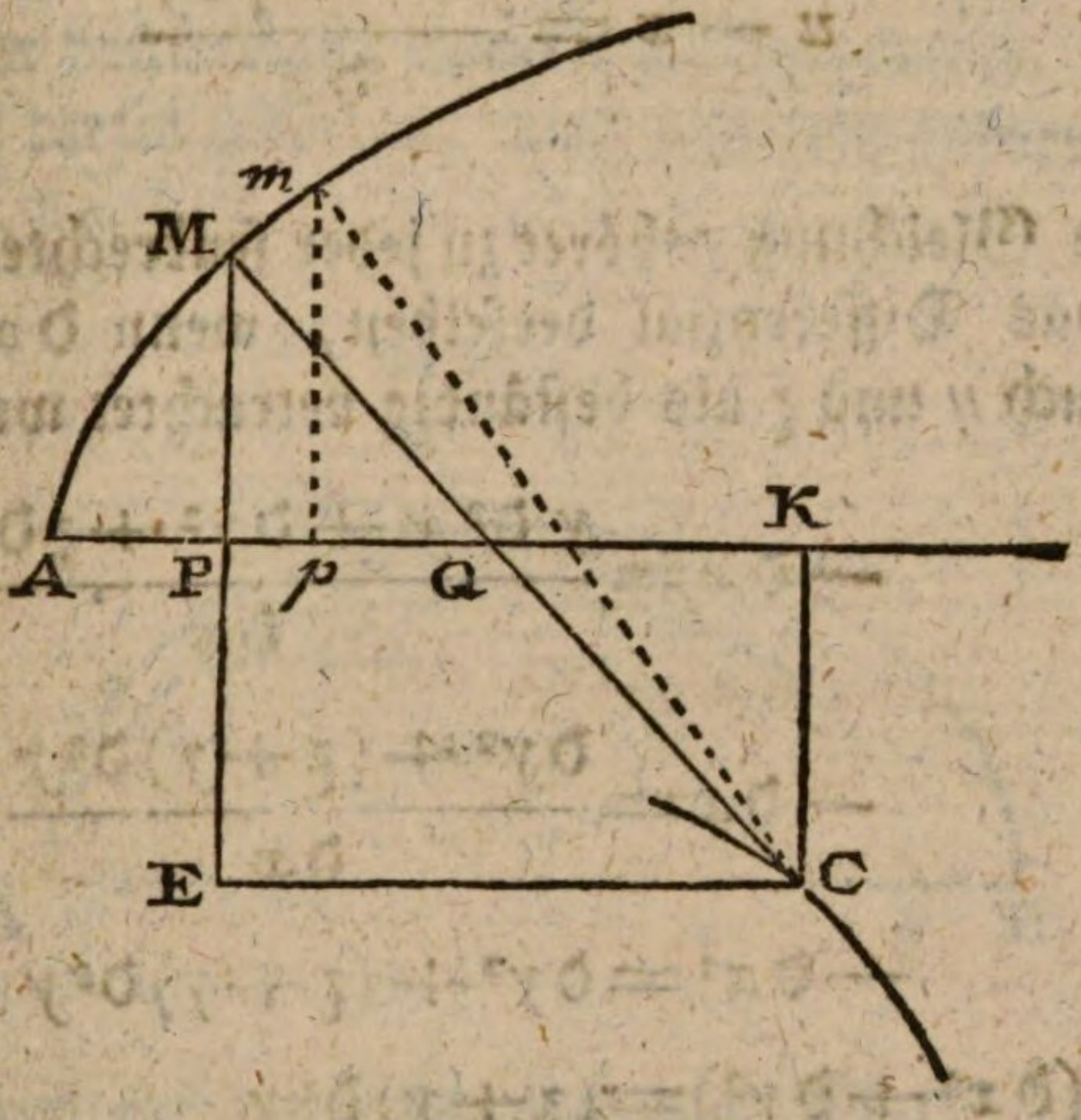
also machet die krumme DF drei Viertel vom Viertel-Zirkel BMD.

§. 5.

§. 5.

Aufgabe.

Es sei gegeben eine beliebige krumme Linie AM, über der Richtlinie AP. Man stelle sich vor, es seien auf der krummen Linie AM unendlich viel senkrechte Linien als MC, *m*C errichtet. Man will die krumme Linie zeichnen, welche von allen diesen senkrechten Linien berühret wird; oder, welches einerlei ist, es soll auf jeder senkrechten Linie der berührende Punkt C bestimmet werden.



Auflösung. Es sei MC eine der senkrechten Linien, und *m*C eine andere, die der vorigen unendlich nahe liege. MP, *mp* sind die beiden Applikaten, wozu die Abzissen AP, A*p* gehören. Es sei C der Punkt, wo MC, *m*C einander schneiden. Man ziehe CK senkrecht auf AP. Man verlängere MP nach E, und ziehe CE mit AP parallel. Es sei Q der Punkt wo AP und MC einander schneiden. Es sei AP = *x*, PM = *y*, AK = *u*, KC = *z*.

Die Subnormale PQ ist $= y\frac{dy}{dx}$, PK $(= CE) = u - x$, $ME = y + z$. Die ähnlichen Dreiecke MPQ, MEC geben

$$MP : PQ :: ME : EC$$

$$y : \frac{y\,dy}{dx} :: (y+z) : EC,$$

daher $$EC = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}$$

oder $$u - x = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}$$

Diese Gleichung gehöret zu jeder senkrechten Linie wie MC. Das Differenzial derselben, wenn dx beständig ist, und auch u und z als beständig betrachtet werden, wird

$$-dx = \frac{y\,d^2y + dy^2 + z\,d^2y}{dx}$$

$$-dx = \frac{dy^2 + (z+y)\,d^2y}{dx}$$

$$-dx^2 = dy^2 + (z+y)\,d^2y$$

$$-(dx^2 + dy^2) = (z+y)\,d^2y$$

$$ME (= z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y}$$

Da nun die Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so läßt sich ME in einer Funkzion von x und y, oder bloß von x ausdrücken. Und wenn ME bekannt ist, so läßt sich der Punkt C bestimmen. Nemlich es wird die Normale MQ nach C verlängert. Durch E wird eine gerade

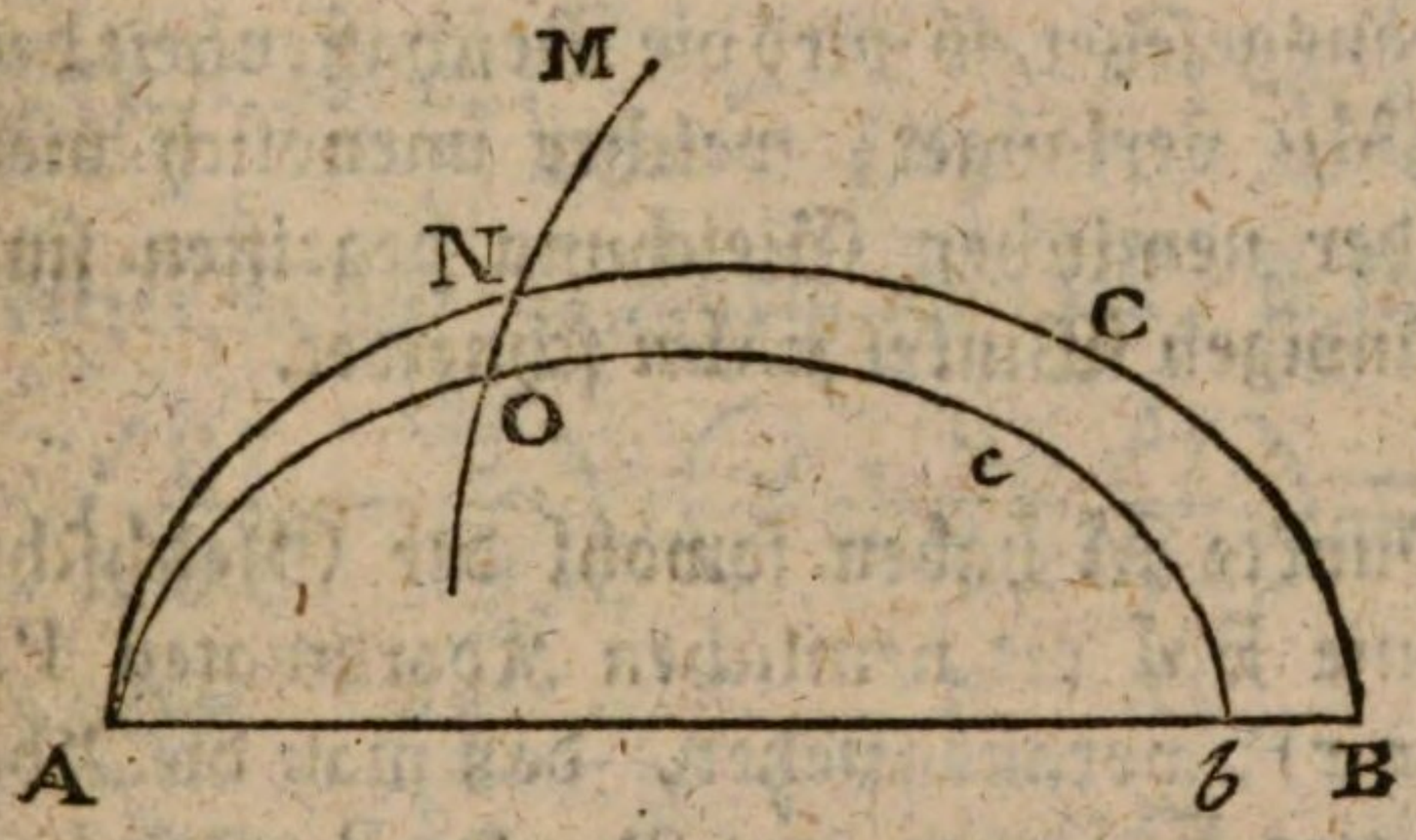
Linie

Linie mit AP parallel gezogen. Der Punkt C, wo beide gerade Linien einander schneiden, ist der verlangte Punkt.

Anmerkung. Die krumme Linie, welche durch alle Punkte wie C gehet, ist nichts anders als die Evolute der AM. Da aber von den Evoluten schon im IXten Hauptstücke weitläuftig gehandelt worden, so halten wir uns dabei weiter nicht auf.

§. 6.

Ein Gleichschnitt ist eine krumme Linie, welche unendlich viel krumme Linien, die alle von einerlei Art sind, unter einem beständigen Winkel durchschneidet. Wir bedienen uns dieses Wortes, weil uns kein anderes bekannt

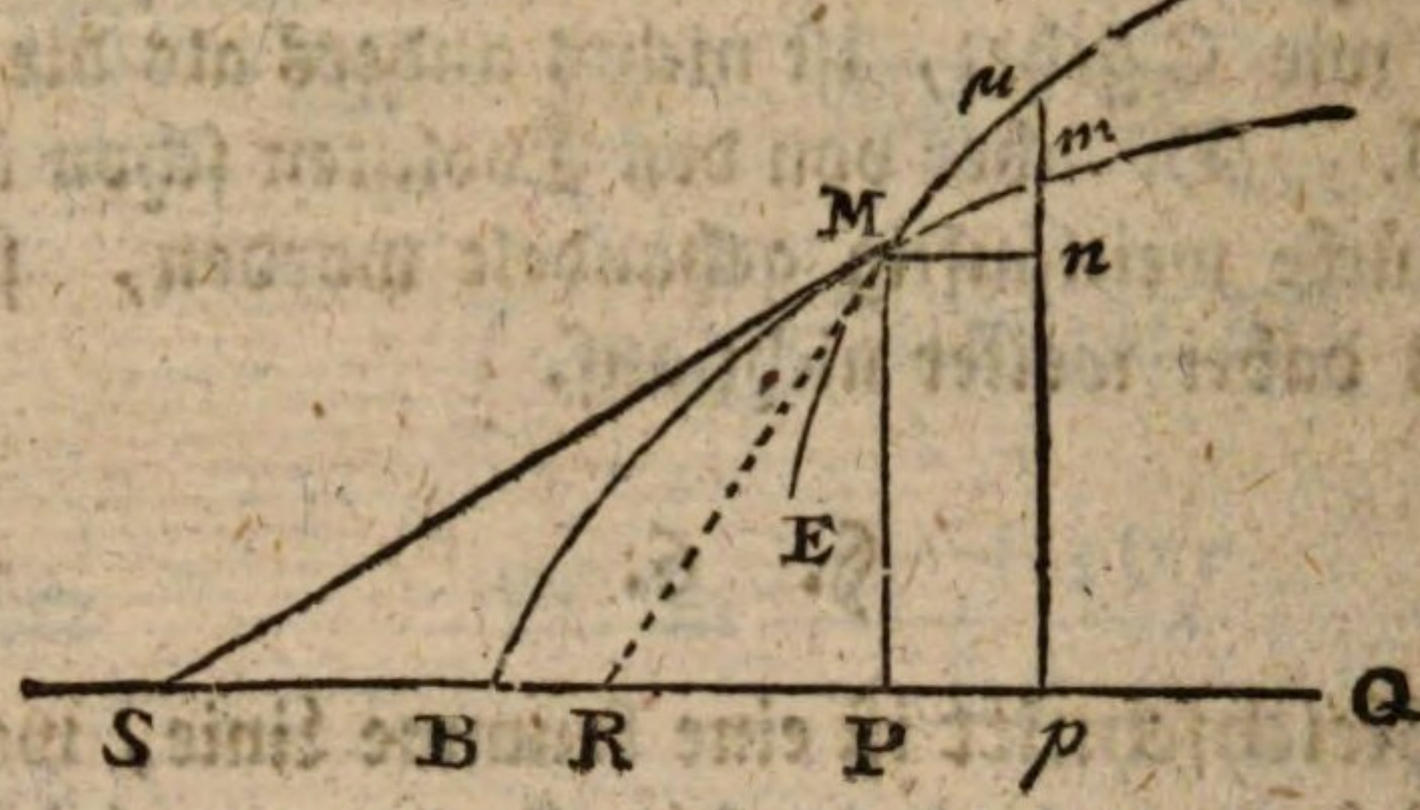


ist, was den erklärten Begriff ausdrücket. Z. E. die krumme Linie MNO, welche eine unendliche Anzahl von Ellipsen, wie ACB, A*cb*, alle unter dem nemlichen Winkel durchschneidet, so daß $\angle MNC = \angle MOc$, ist ein Gleichschnitt aller dieser Ellipsen.

§. 7.

Es seyen unendlich viel Linien wie BM*m*, die alle unter der nemlichen Gleichung begriffen sind. Diese Glei-

chung zwischen BP oder x, und PM oder y, enthält einen Parameter a, welcher in jeder Linie beständig ist, welcher aber verändert werden muß, wenn man alle Linien nach



einander haben will. Z. E. in der Gleichung $y^2 = ax$ wenn man a allmählig verändert, so bekömmt man alle Parabeln, die auf der nemlichen Axe BQ beschrieben sind, und die ihren Ursprung im nemlichen Punkte B haben. Dieses vorausgesetzet, so wird die Beschaffenheit des Gleichschnittes EMμ verlanget, welcher unendlich viel Linien, die unter der nemlichen Gleichung begriffen sind, unter einem beständigen Winkel μMm schneidet.

Im Punkte M haben sowohl der Gleichschnitt EM als die Linie BM die nemlichen Koordinaten PM ($=y$) und BP ($=x$); vorausgesetzet, daß man die Abzissen des Gleichschnittes EM auch vom Punkte B an rechnen wolle.

Es ist $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels MRP, welchen der Gleichschnitt im Punkte M mit der Linie der Abszissen BP machet. Also müssen wir eine andere Bezeichnung wählen, um den Winkel MSP auszudrücken, den die Linie BM im Punkte M mit der nemlichen Linie der Abzissen machet. Dieser Winkel sey also $\frac{\delta y}{\delta x}$. Diese mit δ bezeichneten Differenziale pfleget man zum Unterschiede Variazionen zu nennen.

Wenn

Da die Gleichung der geschnittenen Linien gegeben ist, so differenzire man sie ohne den Parameter zu verändern, so bekömmt man $\frac{\delta y}{\delta x}$. Wenn die Gleichung des Gleichschnittes auch bekannt wäre, so erhielte man durch deren Differenziazion $\frac{dy}{dx}$. Der Winkel $\mu M m$ ist der Unterschied der Winkel μMn und mMn oder der Winkel MRP und MSP, oder der Winkel, deren einer zur Tangente hat $\frac{dy}{dx}$ und der andere $\frac{\delta y}{\delta x}$. Es ist aber, vermöge der Trigonometrie, wenn A und B zwei Winkel sind,

$$\mathfrak{T}(A-B)=\frac{\mathfrak{T}A-\mathfrak{T}B}{1+\mathfrak{T}A.\mathfrak{T}B}$$

also $$\mathfrak{T}(\mu M m)=\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\delta y}{\delta x}\right):\left(1+\frac{dy}{dx}.\frac{\delta y}{\delta x}\right)$$

Da nun dieser Winkel beständig seyn soll, so sey

$$\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\delta y}{\delta x}\right):\left(1+\frac{dy}{dx}.\frac{\delta y}{\delta x}\right)=b$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{\delta y}{\delta x}=b+b\,\frac{dy}{dx}.\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}-b\,\frac{dy}{dx}.\frac{\delta y}{\delta x}=b+\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\left(1-b\,\frac{\delta y}{\delta x}\right)\frac{dy}{dx}=b+\frac{\delta y}{\delta x}\quad\ldots\ (A)$$

Vermittelst dieser Gleichung und der gegebenen für die geschnittene Linien, muß man den Parameter wegschaffen, und so bekömmt man eine Gleichung zwischen x und y, welche das Verhältniß der Koordinaten im Gleichschnitte anzeigen wird.

Exempel I. Wir wollen annehmen, alle geschnittene Linien seyen gerade Linien, die im nemlichen Punkte ihren Anfang nehmen und deren Gleichung $y = ax$ ist;

so kömmt $\delta y = a\delta x$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = a$$

und die Gleichung A wird

$$(1 - ab)\frac{\delta y}{\delta x} = b + a$$

Weil nun $a = \frac{y}{x}$, so ist

$$\left(1 - \frac{by}{x}\right)\frac{\delta y}{\delta x} = b + \frac{y}{x}$$

$$(x - by)\frac{\delta y}{\delta x} = bx + y$$

oder $$(x - by)\delta y = (bx + y)\delta x$$

und dieses ist die Differenzial-Gleichung des Gleichschnittes. Um diese Gleichung integrabel zu machen, setze man $y = ux$, folglich $\delta y = u\delta x + x\delta u$. Man substituire diese Werthe, so bekömmt man

$$(1 - bu)(u\delta x + x\delta u) = (b + u)\delta x$$

oder $$\frac{b\delta x}{x} = \frac{\delta u}{1 + u^2} - \frac{bu\delta u}{1 + u^2}$$

Hiervon ist das Integral

$$bl x = \mathfrak{AT} u - bl\sqrt{(1 + u^2)} + bl m$$

Hier ist $bl m$ die beständige Größe, welche zu jedem Integrale hinzugesetzet werden muß. Weil m willkürlich ist, so kann sie bedeuten was man will. Daß man ihr aber diese Gestalt giebt, geschiehet deswegen, weil ähnliche

Grö-

Größen $b\,l\,x$ und $b\,l\sqrt{(1+u^2)}$ in der Gleichung vorhanden sind. Bringet man nun die Sätze, welche Logarithmen enthalten, in ein Glied, so ist

$$b\,l\,x + b\,l\sqrt{(1+u^2)} - b\,l\,m = \mathfrak{AT}\,u$$

$$b\,[l\,x + l\sqrt{(1+u^2)} - l\,m] = \mathfrak{AT}\,u$$

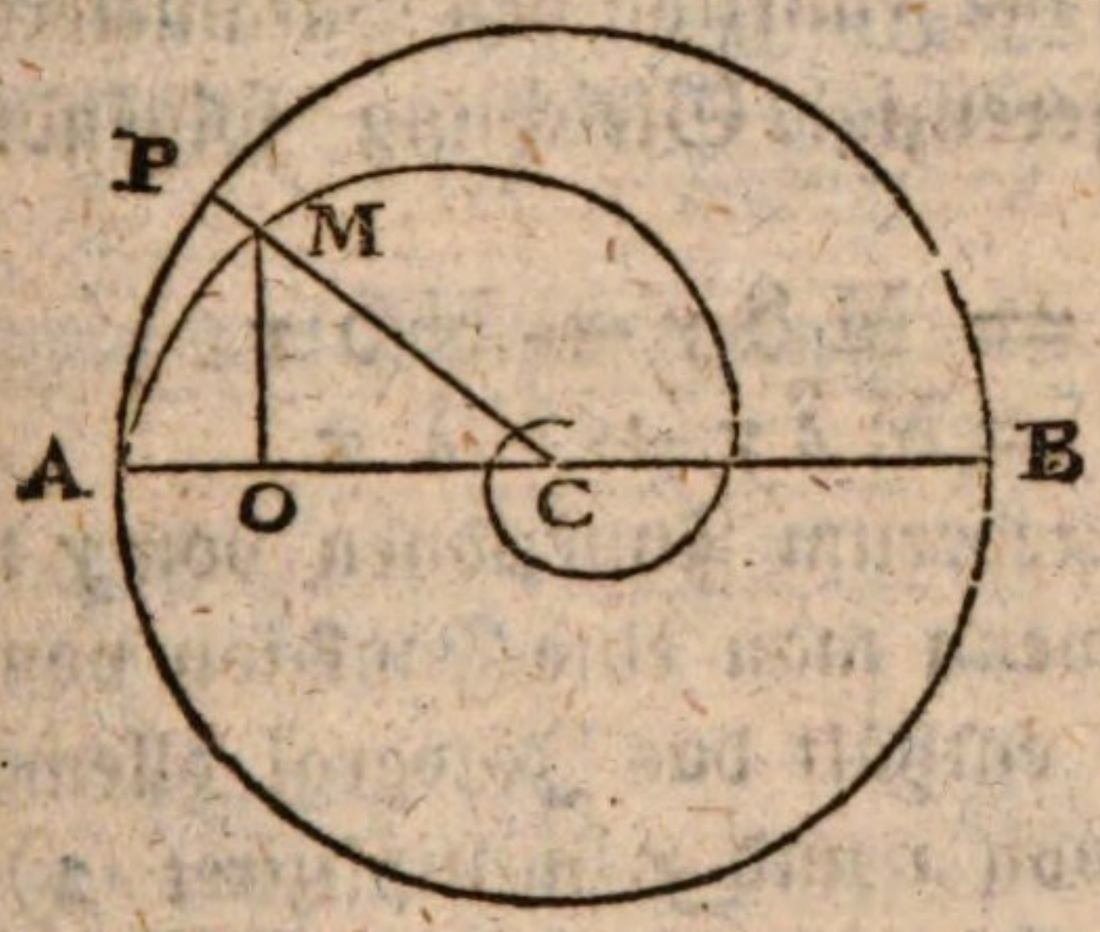
$$b\,l\left(\frac{x.\sqrt{1+u^2}}{m}\right) = \mathfrak{AT}\,u$$

$$b\,l\left(\frac{\sqrt{(x^2+u^2x^2)}}{m}\right) = \mathfrak{AT}\,u$$

Man setze wiederum anstatt u dessen Werth $\frac{y}{x}$ so kömmt

$$b\,l\left(\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{m}\right) = \mathfrak{AT}\frac{y}{x}$$

Diese Gleichung gehöret zur logarithmischen Spirallinie.



Denn es sey die logarithmische Spiral-Linie AMC im Zirkel APB beschrieben. Es sey der Halbmesser CA oder $CP = r$. Es sey der Winkel PCA oder $MCO = \varphi$, welches φ den Bogen AP für den Halbmesser 1 ausdrücket. Es sey $CM = v$, so ist (XVI. Hauptst. §. 5)

$$n\,l\,v = r\,\varphi$$

oder $$\frac{n}{r}\,l\,v = r\,\varphi$$

wo wir unter n den Modulus irgend eines Logarithmensystemes verstehen. Es sey nun ferner $CO = x$, $OM = y$, so ist $CM = v = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, und $CO : OM :: 1$, $T\varphi$ oder $x, y :: 1, T\varphi$, daher $T\varphi = \frac{y}{x}$, und $\varphi = AT\frac{y}{x}$, folglich

$$\frac{n}{r} l\sqrt{(x^2 + y^2)} = AT\frac{y}{x}$$

Diese Gleichung ist von der gefundenen nur in den beständigen Größen verschieden, und beide gehören folglich zu Linien derselben Art, nemlich zu logarithmischen Spirallinien.

Exempel. II. Es sey die Gleichung der geschnittenen Linie so beschaffen, daß eine gewisse Funkzion des Parameters gleich sey einer Funkzion der Koordinaten x und y. Wenn die Funkzion des Parameters $= A$ ist, so wird die Differenzial-Gleichung folgende Gestalt bekommen

$$\partial A = M\partial y + N\partial x$$

oder $$\delta A = M\delta y + N\delta x$$

wo M und N wiederum Funkzionen von y und x vorstellen. Denn, wenn man eine Funkzion von von x und y differenziret, so enthält das Integral allemal 1) dy mit einer Funkzion von x und y multiplizirt 2) dx auch mit einer solchen Funkzion multiplizirt. (XVII. H. § 6.)

Für jede geschnittene Linie ist der Parameter beständig, also $\delta A = o$, folglich

$$o = M\delta y + N\delta x$$

$$o = M\frac{\delta y}{\delta x} + N$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N}{M}$$

In

In diesem Falle wird die höher angeführte Gleichung A

$$\left(1+b\frac{N}{M}\right)\frac{dy}{dx}=b-\frac{N}{M}$$

oder $$(M+bN)\frac{dy}{dx}=bM-N$$

und dieses ist die Differenzial-Gleichung des Gleichschnittes.

Es sey die Gleichung der durchschnittenen Linien

$$A = x^m y^n$$

so stellet diese Gleichung alle mögliche Arten von Parabeln und Hyperbeln vor. Hier wird

$$M = n\,x^m y^{n-1}$$

$$N = m x^{m-1} y^n, \quad \frac{N}{M}=\frac{m x^{m-1} y^n}{n x^m y^{n-1}}=\frac{my}{nx}$$

und die Gleichung des Gleichschnittes

$$\left(1+b\frac{N}{M}\right)\frac{dy}{d\alpha}=b-\frac{N}{M}$$

wird $$\left(1+\frac{bmy}{nx}\right)\frac{dy}{dx}=b-\frac{my}{nx}$$

$$(nx+bmy)\,dy=(bnx-my)\,dx$$

Diese Gleichung gehöret unter diejenigen, welche sich nicht vermittelst der gewöhnlichen Formeln integriren lassen. Jedoch gehet die Integration in gewissen Fällen leicht an. Erstlich, wenn $m = n$, so ist

$$(nx+bny)\,dy = (bnx-ny)\,dx$$

daher

daher $(x + by)\,dy = (bx - y)\,dx$

$x\,dy + by\,dy = bx\,dx - y\,dx$

$x\,dy + y\,dx = bx\,dx - by\,dy$

daher $xy = \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}by^2 + c$

oder $xy = \frac{1}{2}b(x^2 - y^2) + c$

Zweitens, wenn der Gleichschnitt rechtwinklich seyn soll, so wird b oder die Tangente des in diesem Falle rechten Winkels eine unendliche Größe, das heißt, die übrigen Quantitäten verschwinden in Vergleich mit b, folglich anstatt

$$(nx + bmy)\,dy = (bnx - my)\,dx$$

bleibet nur noch

$$bmy\,dy = bnx\,dx$$

oder $my\,dy = nx\,dx$

daher $\frac{1}{2}my^2 = \frac{1}{2}nx^2 + c^2$

oder $my^2 = nx^2 + c^2$

welche Gleichung, sowohl als die vorige, eine Ellipse oder eine Hyperbel andeuten kann.

Neunzehntes Hauptstück.

Von der Variazions-Rechnung und deren Anwendung auf die Geometrie.

§. 1.

Da wir uns vorgenommen haben, die wichtige Lehre von den Variazionen der geometrischen Größen in diesem Hauptstücke vorzutragen, so müssen wir vorher den Anfänger noch mit einigen nöthigen Lehren aus der Integral-Rechnung bekannt machen.

§. 2.

Vollständige oder endliche Differenziale haben ihre Summen oder Integrale sowohl, als unvollständige oder unendlich kleine. Die Summe oder das Integral einer endlichen Differenz wird durch Σ bezeichnet. Also ist z. E.

$$\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = xy$$

weil (VII. Hauptst. §. 23.)

$$\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

Man merke, daß die Zeichen Σ und Δ, wenn sie beide vor einer Differenzen-Funkzion stehen, einander aufheben und beide verschwinden. Z. E. Es ist

$$\Delta\Sigma(x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

$$\Sigma\Delta(xy) = xy$$

welches man mit einiger Aufmerksamkeit leicht einsehen wird.

§. 3.

§. 3.

Bei endlichen sowohl als unendlich kleinen Differenzen gilt die Regel, daß jeder Satz für sich integriret, und allemal wenn das Integral vollständig seyn soll, eine willkürliche beständige Größe hinzugesetzet werden muß.

Z. E. Wenn $\Delta u + \Delta x = \Delta y - \Delta z$

so ist $u + x = y - z + C$

Wenn eine Differenz mit einer beständigen Größe multipliziret oder dividiret ist, so muß das Integral oder die Summe mit derselben auch multipliziret oder dividiret werden.

Z. E. Wenn $\Delta z = a \Delta x$

so ist $z = ax + C$

Wenn $\Delta z = \frac{x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y}{a}$

so ist $z = \frac{xy}{a} + C$

Dieses alles ist schon bei der Integrazion unendlich kleiner Differenzen hinlänglich erkläret worden.

§. 4.

Eben so wie es bei unendlich kleinen Differenzen höhere Differenziale giebt, so finden auch dergleichen bei endlichen Differenzen Statt. Denn es sei gegeben

$$z = xy$$

so erhält man erstlich

$$\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y$$

Nun vergrößere man wiederum Δz um $\Delta^2 z$, Δy um $\Delta^2 y$, x um Δx, y um Δy. Soll auch Δx veränderlich seyn, so muß Δx um $\Delta^2 x$ vergrößert werden. Wir

wollen

wollen aber, der Kürze halben, annehmen, es solle Δx unverändert bleiben. Nach geschehenen Substituzionen subtrahire man die erste Differenz, so kömmt die zweite. Nemlich es wird

$$\Delta z + \Delta^2 z = (x+\Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y+\Delta y)\Delta x + \Delta x(\Delta y + \Delta^2 y)$$

oder $\Delta z + \Delta^2 z = x\Delta y + \Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x\Delta^2 y + y\Delta x$

subt. $\Delta z \ldots = x\Delta y + \Delta x\Delta y \ldots\ldots\ldots\ldots y\Delta x$

bleibet $\Delta^2 z = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

Will man $\Delta^3 z$ haben in der Hypothese, daß Δx unverändert bleibet, so vergrößere man $\Delta^2 z$ um $\Delta^3 z$, Δy um $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y$ um $\Delta^3 y$, x um Δx, y um Δy, und subtrahire die zweite Differenz, so kömmt die dritte, u. s. f. Auf solche Art findet man, wenn $z = xy$, und Δx unverändert bleibet,

Δz oder $\Delta(xy) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$

$\Delta^2 z$ oder $\Delta^2(xy) = 2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$

$\Delta^3 z$ oder $\Delta^3(xy) = 3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

$\Delta^4 z$ oder $\Delta^4(xy) = 4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$

&c. = *&c.*

Hieraus ist nun leicht einzusehen, daß, wenn man rückwärts gehet, die Differenz von der nächst niedrigeren Ordnung allemal als das Integral der nächst höheren Differenz angesehen werden muß. Würde also das Integral verlanget von

$$4\Delta x\Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x\Delta^4 y$$

in der Voraussetzung, daß Δx beständig ist, so wäre das verlangte Integral nichts anders als die vorige Differenz, nemlich $3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$

Hiervon wäre wiederum das Integral

$$2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$$

Das Integral dieser Funkzion würde seyn

$$x\Delta y + y\Delta x - \Delta x\Delta y$$

Endlich hiervon ist das Integral xy

Wenn also eine Differenz von der $n$ten Ordnung gegeben ist, so muß auch $n$mal das Integral gesuchet werden, bis man auf die erste Funkzion zurück kömmt, welche keine Differenzen enthält.

§. 5.

Das nächste Integral von $(\Delta x)^n$ ist allemal $x(\Delta x)^{n-1}$, wenn Δx als beständig betrachtet wird. Zum Beispiele es ist

$$\Sigma(\Delta x)^4 = x(\Delta x)^3$$
$$\Sigma(\Delta x)^7 = x(\Delta x)^6$$

Denn man nehme die Differenz der Funkzion $x(\Delta x)^{n-1}$ nach den gewöhnlichen Regeln, und lasse Δx unverändert,

so ist $\Delta(x\Delta x^{n-1}) = \Delta x.\Delta x^{n-1} = \Delta x^n$

folglich ist $\Sigma\Delta x^n = x\Delta x^{n-1}$

§. 6.

Das Integral von $x^n\Delta x$ ist nicht so einfach, sondern man erhält für jeden Werth von n eine besondere Formel,

nemlich $\Sigma(x\Delta x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$

$$\Sigma(x^2\Delta x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2\Delta x}{2} + \frac{x\Delta x^2}{6}$$

$$\Sigma(x^3\Delta x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3\Delta x}{2} + \frac{x^2\Delta x^2}{4} -$$

&c. &c.

Die

Die erste Formel wird also bewiesen. Wenn man von x^2 die Differenz nimmt, so kömmt

$$\Delta(x^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

Man integnire, so kömmt

$$x^2 = 2\Sigma(x\Delta x) + \Sigma(\Delta x^2)$$

daher $x^2 - \Sigma(\Delta x^2) = 2\Sigma(x\Delta x)$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{\Sigma(\Delta x^2)}{2} = \Sigma x\Delta x$$

Es ist aber vermöge des vorigen Paragraphs $\Sigma(\Delta x^2) = x\Delta x$, folglich

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2} = \Sigma(x\Delta x)$$

welches die erste Formel war. Die zweite wird auf eine ähnliche Art gefunden. Es ist

$$\Delta(x^3) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

Wenn man integriret, so kömmt

$$x^3 = 3\Sigma(x^2\Delta x) + 3\Sigma(x\Delta x^2) + x\Delta x^2$$

Um $3\Sigma x\Delta x^2$ zu finden, betrachte man, daß Δx beständig ist. Also ist $3\Sigma(x\Delta x^2)$ oder $3\Sigma(x\Delta x.\Delta x) = 3\Delta x.\Sigma(x\Delta x)$. Es ist aber aus der vorigen Formel $\Sigma(x\Delta x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x\Delta x}{2}$, folglich $3\Delta x.\Sigma(x\Delta x) = \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2}$.

Setzet man diesen Werth in die lezte Gleichung, so kömt

$$x^3 = 3\Sigma(x^2\,\delta x) + \frac{3x^2\Delta x}{2} - \frac{3x\Delta x^2}{2} + x\Delta x^2$$

woraus man, nach den gewöhnlichen Redukzionen die zweite Formel erhält, nemlich

$$\Sigma(x^2 \delta x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2 \Delta x}{2} + \frac{x \Delta x^2}{6}$$

Um die dritte Formel zu finden, betrachte man, daß

$$\Delta(x^4) = 4x^3 \Delta x + 6x^2 \Delta x^2 + 4x \Delta x^3 + \Delta x^4$$

Man integrire jeden Satz so ist

1) $\Sigma \Delta (x^4) = x^4$

2) $\Sigma(4x^3 \Delta x) = 4\Sigma(x^3 \Delta x)$

3) $6\Sigma(x^2 \Delta x^2) = 6 \Delta x . \Sigma(x^2 \Delta x)$. Da aus der vorigen Formel $\Sigma(x^2 \Delta x)$ gefunden worden, so darf man dieselbe nur mit $6 \Delta x$ multipliziren, und man erhält $2x^3 \Delta x - 3x^2 \Delta x^2 + x \Delta x^3$

4) $4\Sigma(x \Delta x^3) = 4 \Delta x^2 . \Sigma(x \Delta x)$. Da in der ersten Formel $\Sigma(x \Delta x)$ gefunden worden, so multiplire man dieselbe mit $4 \Delta x^2$, dieses giebt $2x^2 \Delta x^2 - 2x \Delta x^3$.

5) $\Sigma(\Delta x^4) = x \Delta x^3$, aus dem vorigen Paragraph. Substituiret man nun alle diese Werthe, und reduziret wie gewöhnlich, so erhält man die dritte Formel. Auf gleiche Art kann man weiter fortgehen.

§. 7.

Es ist dem Leser schon bekannt, wie man Differenzial-Gleichungen mit unendlich kleinen Differenzen integriren muß, wenn nur eine veränderliche Größe vorhanden ist, und wenn die Differenzen von der ersten Ordnung sind. Wir müssen aber auch kurzlich zeigen, wie man sich zu verhalten hat, wenn mehrere veränderliche Größen und höhere Differenziale vorkommen.

§. 8.

Wenn eine homogene Gleichung zwischen x, y, dx und dy integriret werden soll, so nehme man an, es sei $y = ux$, so wird die gegebene Gleichung sich dergestalt verwandeln, daß man in einem Gliede $\frac{dx}{x}$ und im anderen eine Funkzion von u und du bekomme. Alsdann wird die Integrazion nach den gewöhnlichen Regeln verrichtet.

Es sei z. E.

$$(x^2 + xy)\, dy = y^2\, dx$$

oder

$$dy = \frac{y^2}{x^2 + xy}\, dx$$

Nimmt man an $y = ux$, so ist $dy = u\,dx + x\,du$

und es wird

$$u\,dx + x\,du = \frac{u^2 x^2}{x^2 + u x^2}\, dx$$

oder

$$u\,dx + x\,du = \frac{u^2}{1+u}\, dx$$

$$\left(u - \frac{u^2}{1+u}\right) dx = -x\,du$$

$$\frac{u}{1+u}\, dx = -x\,du$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-(1+u)\,du}{u}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{du}{u} - du$$

Integriret man, so kömmt

$$lx = -lu - u$$

und da $u = \frac{y}{x}$, so ist

$$lx = -l\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$$

und weil $l\frac{y}{x} = ly - lx$, so kömmt

$$lx = -ly + lx - \frac{y}{x}$$

$$o = -ly - \frac{y}{x}$$

$$x\,ly = -y$$

$$x = c - \frac{y}{ly}$$

Dieses ist das verlangte Integral. Man versuche es zu differenziren, so wird die gegebene Differenzial-Gleichung, nemlich $(x^2 + xy)\,dy = y^2\,dx$, wieder heraus kommen.

§. 9.

Wenn die gegebene Gleichung nicht homogen ist, so läßt sie sich manchmal homogen machen, wenn man annimmt $y = u^s$, und dem Exponenten s einen bequemen Werth giebt.

Es sey gegeben $(ay^2x^2 + b + cxy)\,dx = fx^4y^2dy$
Wenn man annimmt $y = u^s$, so wird

$$(ax^2u^{2s} + b + cxu^s)\,dx = fx^4u^{2s}d(u^s)$$

und weil $d(u^s) = su^{s-1}du$, so ist

$$(ax^2u^{2s} + bx^0u^0 + cx^1u^s)\,dx = fsx^4u^{3s-1}du$$

Soll diese Gleichung homogen sein, so müssen alle Sätze gleich viel veränderliche Dimensionen haben, folglich

ich muß in allen Sätzen die Summe der Exponenten von x und u gleich sein. Dieses wird eintreffen, wenn man annimmt $s = -1$, folglich $y = u^{-1}$, dann wird

$$(ax^2u^{-2} + b + cxu^{-1})\,dx = -fx^4u^{-4}\,du$$

und dieses ist eine homogene Gleichung von 0 Dimensionen. Multiplizirt man alles u^4 um die negativen Exponenten wegzuschaffen, so wird

$$(ax^2u^2 + bu^4 + cxu^3)\,dx = -fx^4\,du$$

Dieses ist nun eine homogene Gleichung von vier Dimensionen zwischen x und u. Setzet man ferner $u = xz$, so wird sie sich nach Anleitung des vorigen Paragraphs einrichten lassen.

§. 10.

Wenn die Gleichung mehr als zwei veränderliche Größen enthält, so muß man sich ebenfalls durch eine geschickte Einführung neuer veränderlicher Größen behelfen, um eine Gleichung zu bekommen, worin die veränderlichen Größen abgesondert seien, das heißt, wo in jedem Satze nur eine einzige veränderliche Größe und ihr Differenzial enthalten sey.

§. 11.

Wenn eine Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung und von zwei veränderlichen Größen x und y gegeben ist, so muß man sie so einrichten, daß sie die Gestalt einer Gleichung von vier veränderlichen Größen, nemlich x, y, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)$ und $q\left(=\frac{dp}{dx}\right)$ bekomme. Alsdann wird diese Gleichung durch eine bequeme Einführung neuer veränderlicher Größen, wenn es möglich ist, integrabel gemacht. Ein Paar Exempel werden die Sache begreiflicher machen, als abstrakte Regeln.

Exempel I. Es sei gegeben zu integriren

$$x^2 \partial^2 y + x \partial x \partial y = n y \partial x^2,$$

wo angenommen wird, daß ∂x beständig ist. Wenn man alles durch ∂x^2 dividiret, so kömmt

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} = ny$$

Wenn nun $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, so ist $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, weil ∂x beständig ist. Also hat man

$$x^2 q + x p = n y$$

Man setze, es sei $y = ux$ und $q = \frac{z}{x}$, oder $qx = z$, so bekömmt man $zx + px = nux$

oder $z + p = nu$

$z = nu - p$

Weil nun $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, so ist $\partial y = p \partial x$, uud weil $y = ux$, so ist $\partial y = u \partial x + x \partial u$, daher ist $p \partial x = u \partial x + x \partial u$ oder $(p - u) \partial x = x \partial u$, oder $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{p - u}$. Ferner, weil $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, so ist $\partial p = q \partial x$, und weil $q = \frac{z}{x}$, so ist $\partial p = \frac{z \partial x}{x}$, folglich $\frac{\partial p}{z} = \frac{\partial x}{x}$. Da nun auch $\frac{\partial u}{p-u} = \frac{\partial x}{x}$, so ist $\frac{\partial p}{z} = \frac{\partial u}{p-u}$

In diese letztgefundene Formel setze man den gefundenen Werth von z, nemlich $z = nu - p$, so wird

$$\frac{dp}{nu - p} = \frac{du}{p - u}$$

oder $(p - u)\,dp = (nu - p)\,du$

Diese letzte Gleichung ist homogen, von der ersten Ordnung, und enthält nur zwei veränderliche Größen u und p. Sie kann also nach §. 8. integriret werden, und so bekömmt man den Werth des p in einer Funkzion von u. Wenn dieses geschehen ist, so setze man den gefundenen Werth des p in die obige Formel

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$$

so bekömmt man eine Gleichung, welche wiederum nach §. 8. integriret werden kann, und den Werth von lx in einer Funkzion von u oder $\frac{x}{y}$ giebet.

Exempel II. Es sey

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - 4y^2$$

wo dx beständig ist, oder

$$x^4 q = p(x^3 + 2xy) - 4y^2$$

Man nehme an, es sei $q = zx^{n-2}$, $p = tx^{n-1}$, $y = ux^n$, so bekömmt man

$$x^{n+2} z = tx^{n+2} + x^{2n}(2tu - 4u^2)$$

Man siehet hier, daß x aus der Gleichung verschwinden wird, wenn man annimmt $n = 2$. In diesem Falle bekömmt man

$$x^4 z = tx^4 + x^4(2tu - 4u^2)$$
$$z = t + 2tu - 4u^2$$

und weil angenommen worden

$y = u x^n$, so wird $y = u x^2$

$p = t x^{n-1}$, so wird $p = t x$

$q = z x^{n-2}$, so wird $q = z$

Aus $y = u x^2$ folget

$$\partial y = 2 u x \partial x + x^2 \partial u$$

es ist aber $\partial y = p \partial x$, also

$$p \partial x = 2 u x \partial x + x^2 \partial u$$

$$\frac{p}{x} \partial x = 2 u \partial x + x \partial u$$

und weil $\frac{p}{x} = t$, so ist

$$t \partial x = 2 u \partial x + x \partial u$$

oder $(t - 2u) \partial x = x \partial u$

Ferner, weil $p = t x$, so ist

$$\partial p = t \partial x + x \partial t$$

es ist aber $\partial p = q \partial x = z \partial x$, also ist

$$z \partial x = t \partial x + x \partial t$$

oder $(z - t) \partial x = x \partial t$

Aus beiden Gleichungen $(t - 2u) \partial x = x \partial u$ und $(z - t) \partial x = x \partial t$ ziehet man

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{t - 2u}$$

und $$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial t}{z - t}$$

Also ist $\frac{\partial u}{t - 2u} = \frac{\partial t}{z - t}$

oder $(z - t)\partial u = (t - 2u)\partial t$

oder weil $z = t + 2tu - 4u^2$

$(2tu - 4u^2)\partial u = (t - 2u)\partial t$

$(t - 2u).2u\partial u = (t - 2u)\partial t$

folglich $2u\partial u = \partial t$

folglich $u^2 + c = t$

Man setze den gefundenen Werth des t, nemlich $u^2 + c$ in die Gleichung $\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{t - 2u}$, so bekömmt man

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{u^2 - 2u + c}$$

Wir wollen dieses Differenzial nur für den Fall integriren, wo die beständige Größe $c = 1$ angenommen wird. In diesem Falle also hat man zu integriren

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{u^2 - 2u + 1}$$

oder $$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{(u - 1)^2}$$

oder $$\frac{\partial x}{x} = (u - 1)^{-2}\partial u$$

folglich wird das Integral

$$l\frac{x}{c'} = \frac{(u-1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(u-1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u-1} = \frac{1}{1-u}.$$

und weil $u = \frac{y}{x^2}$,

so ist $1\frac{x}{c'} = 1 : \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2 - y}$

Dieses ist das Integral der Gleichung $x^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$= (x^3 + 2xy)\frac{\partial y}{\partial x} - 4y^2$ für den Fall, wo die erste beständige Größe c gleich 1 angenommen. Wird aber c größer oder kleiner als 1 angenommen, so wird die Rechnung zu weitläuftig, und wir können uns hier nicht damit einlassen. Die zweite beständige Größe c' rühret daher, daß man zweimal integriret hat, weil die Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung war. Ueberhaupt muß das vollständige Integral eines Differenzials der $n$ten Ordnung auch n verschiedene beständige Größen enthalten.

Exempel III. Es sei diese Gleichnng zu integriren

$$xy\partial^2 y = y\partial x\partial y + x\partial y^2 + \frac{bx\partial y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{oder } xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y\frac{\partial y}{\partial x} + x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{bx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\text{oder } xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Man mache $p = uy$ und $q = zy$, so kömmt

$$xy^2 z = uy^2 + xu^2 y^2 + \frac{bxu^2 y^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{oder } xz = u + xu^2 + \frac{bxu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$\text{daher ist } z = \frac{u}{x} + u^2 + \frac{bu^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Weil

Weil nun angenommen worden $p = uy$, so ist $\partial p = u\partial y + y\partial u$. Es ist aber $u = \frac{p}{y}$,

folglich $\partial u = \frac{y\partial p - p\partial y}{y^2}$ oder $\frac{\partial p}{y} - \frac{p\partial y}{y^2}$,

folglich $y\partial u = \partial p - \frac{p\partial y}{y}$, also

$$\partial p = u\partial y + \partial p - \frac{p\partial y}{y}$$

$$o = u\partial y - \frac{p\partial y}{y}$$

$$o = uy\partial y - p\partial y$$

$$o = uy - p$$

$$o = uy - \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$o = uy\partial x - \partial y$$

$$o = u\partial x - \frac{\partial y}{y}$$

$$\frac{\partial y}{y} = u\partial x$$

Ferner, weil $\frac{\partial p}{\partial x} = q = \zeta y$, so ist $\partial p = \zeta y\,\partial x$.

Da also $\partial p = \zeta\, y\, \partial\, x$

und auch $\partial p = u\,\partial\, y + y\,\partial\, u$

so

so ist $u\,\partial y + y\,\partial u = z\,y\,\partial x$

$$u\,\partial y = z\,y\,\partial x - y\,\partial u$$

$$\partial y = \frac{z\,y\,\partial x - y\,\partial u}{u}$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{z\,\partial x - \partial u}{u}$$

Weil nun $\frac{\partial y}{y} = u\,\partial x$

und $\frac{\partial y}{y} = \frac{z\,\partial x - \partial u}{u}$

so ist $u\,\partial x = \frac{z\,\partial x - \partial u}{u}$

$$u^2\,\partial x = z\,\partial x - \partial u$$

$$\partial u + u^2\,\partial x = z\,\partial x$$

In diese lezte Formel seße man den vorher gefundenen Werth von z, nemlich

$$z = \frac{u}{x} + u^2 + \frac{b\,u^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

so kömmt

$$\partial u + u^2\,\partial x = \frac{u\,\partial x}{x} + u^2\,\partial x + \frac{b\,u^2\,\partial x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

woraus man ziehet

$$-\frac{u\,\partial x - x\,\partial u}{u^2} = \frac{b\,x\,\partial x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Das erste Glied wird integriret durch $c - \frac{x}{u}$. Um das

zweite

zweite Glied zu integriren setze man $\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$, so wird $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, $\partial x = \frac{-t\,\partial t}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}$, folglich $\frac{b\,x\,\partial x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = -b\,\partial t$, wovon das Integral $-bt$ ist, oder $-b\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Also wird

$$c - \frac{x}{u} = -b\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$uc - x = -bu\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

$$-x = -u[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$$

$$u = \frac{x}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Diesen Werth des u setze man in die Formel

$$\frac{\partial y}{y} = u\,\partial x$$

so kömmt $\frac{\partial y}{y} = \frac{x\,\partial x}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$

Um hier das zweite Glied zu inregriren, setze man wiederum $\sqrt{(a^2 - x^2)} = t$, so wird wie vorher $x = \sqrt{(a^2 - t^2)}$, $\partial x = \frac{-t\,\partial t}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}$, folglich $\frac{x\,\partial x}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{-t\,\partial t}{c + bt} = -\frac{\partial t}{b} + \frac{c\,\partial t}{b(c + bt)}$. Hiervon ist das Integral $-\frac{t}{b} + \frac{c}{b^2} l(c + bt)$ oder $-\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{c}{b^2} l[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$.

Integriret man demnach die gefundene Gleichung

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

so kömmt

$$l\frac{y}{c'} = -\frac{1}{b}\sqrt{(a^2 - x^2)} + \frac{c}{b^2} l[c + b\sqrt{(a^2 - x^2)}]$$

und dieses Integral ist vollständig, weil es zwei willkürliche beständige Größen enthält, nemlich c und c'

§. 12.

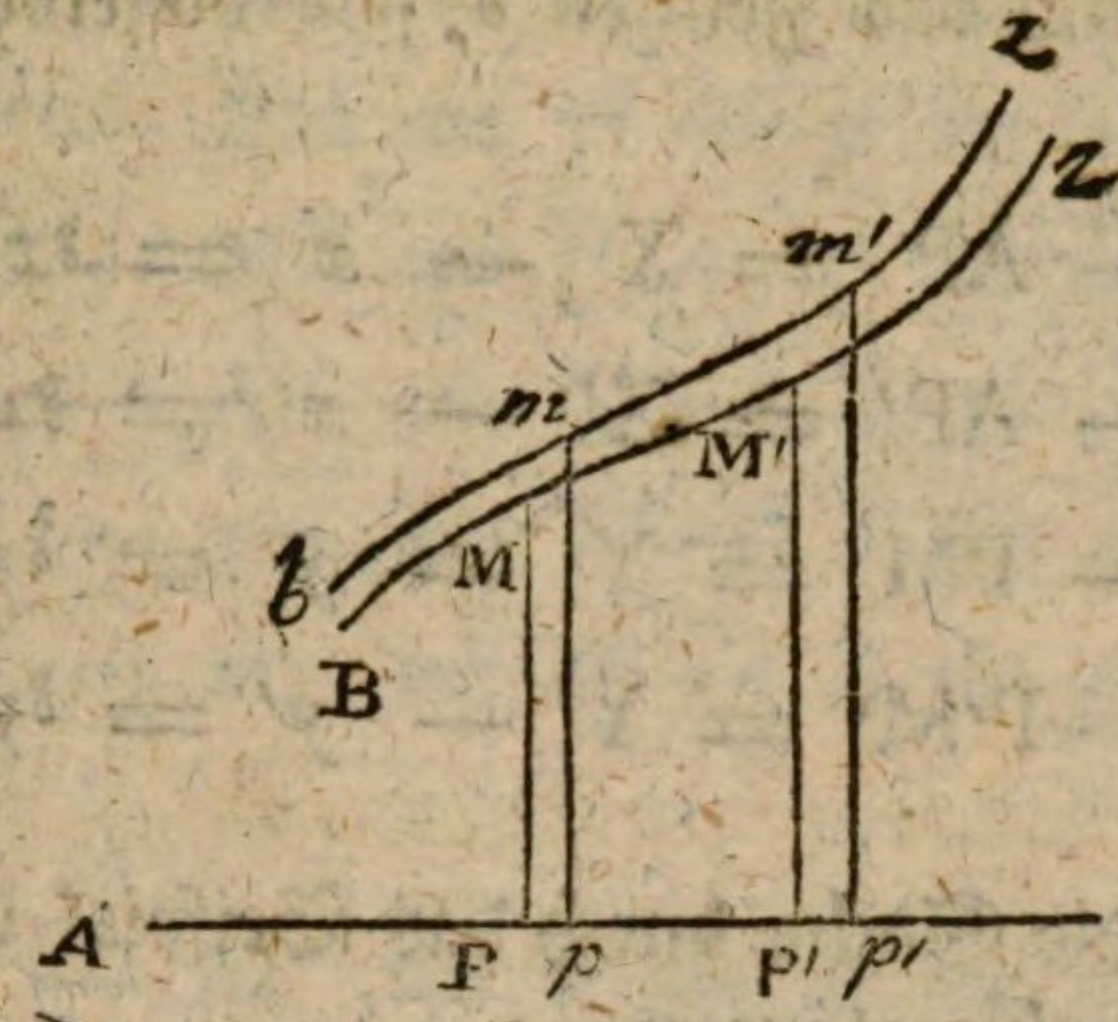
Die angeführten Exempel geben genugsam zu erkennen, wie man mit Differenzialen der zweiten Ordnung verfahren muß. Daraus kann ein Anfänger schließen, daß auch bei höheren Differenzialen alles darauf ankömmt, anstatt der gegebenen veränderlichen Größen andere in die Gleichung einzuführen, so daß man zuletzt nichts zu integriren habe als solche Sätze, die eine einzige veränderliche Größe nebst ihrem Differenziale enthalten. Laßt uns nun zur Variazions-Rechnung schreiten, welche ohne die vorhergehenden Vorbereitungen nicht hätte verstanden werden können.

§. 13.

Es sey BMZ eine krumme Linie, und PM ($= y$), P′M′ ($= y'$) zwei ihrer Applikaten, welche zu den Abzissen AP ($= x$) und AP′ $= x'$ gehören. Wir wollen annehmen, daß sich das Verhältniß oder die Beziehung der Koordinaten x und y um etwas verändere, (es mag seyn

(Siehe die folgende Figur.)

wegen



wegen der Veränderung des Parameters oder aus irgend einer andern Ursach). Die krumme Linie übergehe demnach aus ihrer Lage und Gestalt BMZ in eine andere unendlich nahe *b m z*. Man nehme in der veränderten oder variirten Linie *b m z* zwei Punkte *m* und *m'* den Punkten M und M' unendlich nahe. Man ziehe beide Applikaten *p m* (= Y) und *p' m'* (= Y') welche mit PM, P'M' parallel sind, und zu den Abzissen A *p* (= X) und A*p'* (= X') gehören. Die endliche Differenz zweier Applikaten oder Abzissen mag wie gewöhnlich durch Δ ausgedrücket werden, so ist

$$AP' - AP = x' - x = \Delta x$$

$$P'M' - PM = y' - y = \Delta y$$

$$Ap' - Ap = X' - X = \Delta X$$

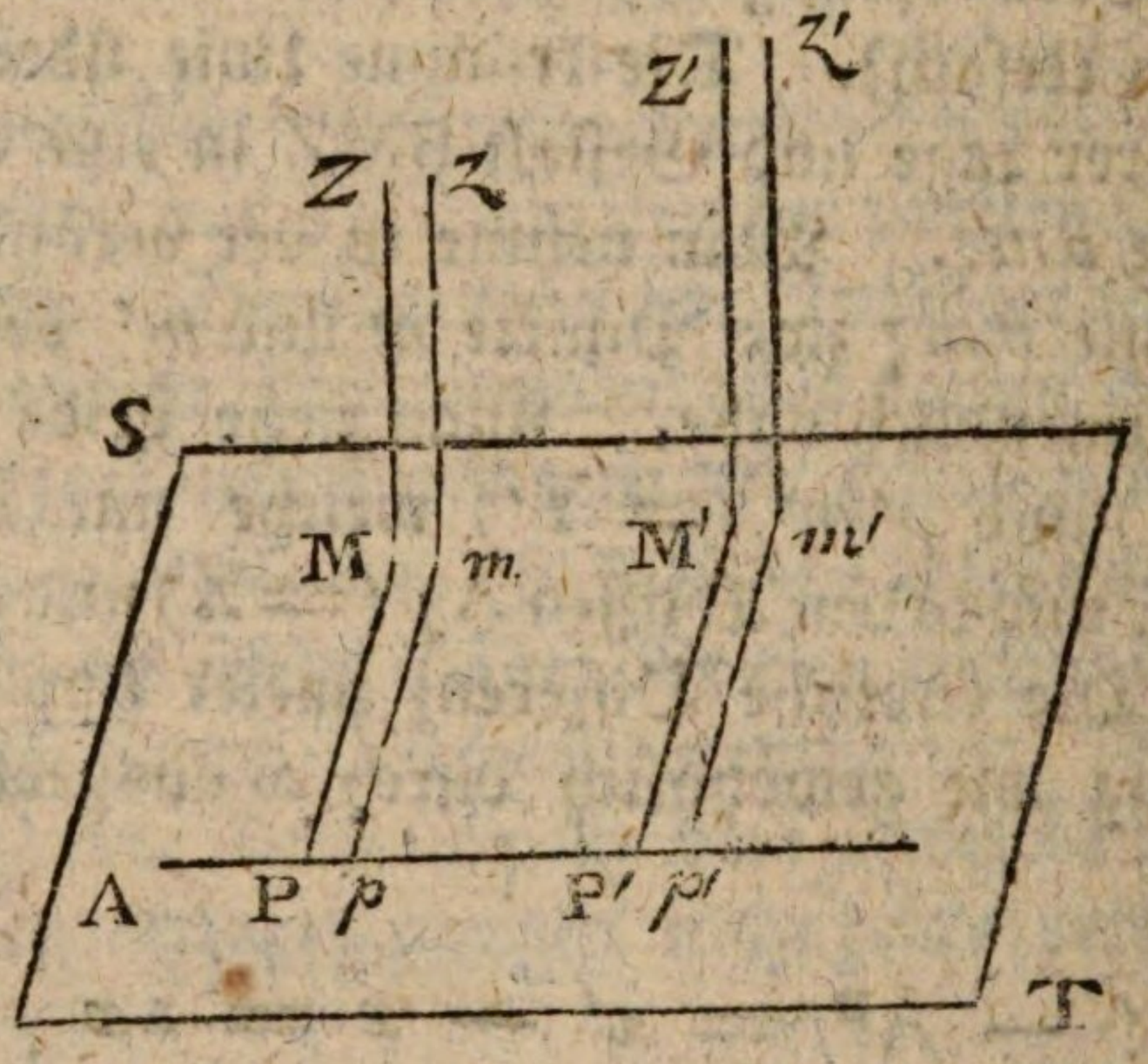
$$p'm' - pm = Y' - Y = \Delta Y$$

Wir müssen aber noch ferner die unendlich kleine Differenz zweier Applikaten, wie PM und *pm*, P'M' und *p'm'* oder zweier Abzissen als AP und A*p*, AP' und A*p'* betrachten, welche Differenz aus der Veränderung des Verhältnisses zwischen *x* und *y* entstehet. Diese Art unendlich kleiner Differenzen wollen wir zum Unterschiede Variazio-

nen nennen, und das Zeichen δ soll dieselben anzeigen. Also ist

$$Ap - AP = X - x = \delta x$$
$$Ap' - AP' = X' - x' = \delta x'$$
$$pm - PM = Y - y = \delta y$$
$$p'm' - P'M' = Y' - y' = \delta y'$$

Laßt uns die Sache durch das Beispiel der krummen Flächen noch mehr erläutern.



Es sey eine krumme Fläche, die in Betreff der Ebne ST durch drei Koordinaten wie AP ($=x$), PM ($=y$), MZ ($=z$), oder AP' ($=x'$), P'M' ($=y'$), M'Z' ($=z'$) bestimmet wird. Gesetzet nun, es geschehe eine unendlich kleine Veränderung in der Beziehung der drei Koordinaten, so verwandelt sich die krumme Fläche in eine andere, deren Beschaffenheit in Betreff der nemlichen Ebne ST durch die neuen Koordinaten Ap ($=X$), pm ($=Y$), mz ($=Z$), oder Ap' ($=X'$), $p'm'$ ($=Y'$), mz' ($=Z'$), welche den vorigen unendlich nahe sind, bestimmet wird. So haben wir hier wiederum

AP'

$$AP' - AP = x' - x = \Delta x$$
$$P'M' - PM = y' - y = \Delta y$$
$$M'Z' - MZ = z' - z = \Delta z$$
$$Ap' - Ap = X' - X = \Delta X$$
$$p'm' - pm = Y' - Y = \Delta Y$$
$$m'z' - mz = Z' - Z = \Delta Z$$

Hingegen ist

$$Ap - AP = X - x = \delta x$$
$$pm - PM = Y - y = \delta y$$
$$mz - MZ = Z - z = \delta z$$
$$Ap' - AP' = X' - x' = \delta x'$$
$$p'm' - P'M' = Y' - y' = \delta y'$$
$$m'z' - M'Z' = Z' - z' = \delta z'$$

§. 14.

Weil $X' - X = \Delta X$, so ist $X' = X + \Delta X$
und weil $X' - x' = \delta x'$, so ist $X' = x' + \delta x'$
Weil $Y' - Y = \Delta Y$, so ist $Y' = Y + \Delta Y$
und weil $Y' - y' = \delta y'$, so ist $Y' = y' + \delta y'$.

Man siehet also daß

$$X + \Delta X = x' + \delta x'$$
$$Y + \Delta Y = y' + \delta y'$$

In dieser lezten Gleichung setze man anstatt Y dessen Werth $y + \delta y$, und anstatt y' dessen Werth $y + \Delta y$, so entstehet

$$y + \delta y + \Delta(y + \delta y) = y + \Delta y + \delta(y + \Delta y)$$

Es ist aber $\Delta(y+\delta y) = \Delta y + \Delta \delta y$. Es ist auch aus ähnlichen Gründen $\delta(y+\Delta y) = \delta y + \delta \Delta y$. Setzet man diese Werthe von $\Delta(y+\delta y)$ und $\delta(x+\Delta y)$ in die Gleichung, so bekömmt man

$$y+\delta y+\Delta y+\Delta\delta y = y+\Delta y+\delta y+\delta\Delta y$$

oder $$\Delta\delta y = \ldots \delta\Delta y$$

Die lezte Gleichung enthält einen wichtigen Lehrsatz, der in Worten also ausgedrücket werden kann: die Differenz der Variazion ist gleich der Variazion der Differenz.

§. 15.

Voriger Lehrsatz gilt auch von höheren Differenzen. Es wird also seyn

$$\Delta^2 y = \Delta^2 \delta y$$

$$\delta\Delta^3 y = \Delta^3 \delta y$$

$$\delta\Delta^4 y = \Delta^4 \delta y$$

überhaupt $\delta\Delta^n y = \Delta^n \delta y$

Denn es ist $\delta\Delta^2 y = \delta\Delta(\Delta y) = \Delta\delta(\Delta y)$ und weil $\delta(\Delta y) = \Delta\delta y$, so ist $\Delta\delta(\Delta y) = \Delta\Delta\delta y = \Delta^2\delta y$.

Ferner ist $\delta\Delta^3 y = \delta\Delta(\Delta^2 y) = \Delta\delta(\Delta^2 y)$. Es ist aber eben jezt bewiesen worden, daß $\delta\Delta^2 y = \Delta^2\delta y$, also wird $\Delta\delta(\Delta^2 y) = \Delta\Delta^2\delta y = \Delta^3\delta y$.

Weiter ist $\delta\Delta^3 y = \delta\Delta(\Delta^3 y) = \Delta\delta(\Delta^3 y)$. Es ist aber $\delta(\Delta^3 y) = \Delta^3\delta y$, also wird $\Delta\delta(\Delta^3 y) = \Delta\Delta^3\delta y = \Delta^4\delta y$.

Und so kann der Beweis ins unendliche fortgesetzet werden.

§. 16.

§. 16.

Es sey eine Reihe

$$'V, \ ''V, \ '''V \ldots\ldots V$$

Hier ist der lezte Satz die Differenz des Aggregats aller vorhergehenden Sätze. Denn da die Aggregate

$$'V$$
$$'V + ''V$$
$$'V + ''V + '''V$$
$$\&c.$$

allemal um einen Satz zu nehmen, so ist jeder Satz der Unterschied oder die Differenz zwischen der itzigen und der vorhergehenden Summe. Also ist auch der letzte Satz V die Differenz der Summe aller vorhergehenden Sätze.

Folglich $V = \Delta('V + ''V + '''V + \&c.)$

$$\Sigma V = ('V + ''V + '''V + \&c.)$$

und $$\delta \Sigma V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

Ferner, weil $V = \Delta('V + ''V + '''V + \&c.)$

so ist $$\delta V = \delta \Delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

$$\delta V = \Delta \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

$$\Sigma \delta V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

Da nun

$$\Sigma \delta V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

$$\delta \Sigma V = \delta('V + ''V + '''V + \&c.)$$

so folget daraus, daß

$$\Sigma \delta V = \delta \Sigma V$$

das heißt: das Integral der Variazion ist gleich der Variazion des Integrals.

§. 17.

Man kann die auf einander folgenden Integrale einer Funktion V, eben so wie die auf einander folgenden Differenzen durch kleine Ziffern andeuten. Zum Exempel

anstatt $\Sigma\,\Sigma\,V$ kann man schreiben $\Sigma^2 V$

$\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,V$ . . . . . $\Sigma^3 V$

$\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,\Sigma\,V$ . . . . . $\Sigma^4 V$

&c. . . . . &c.

Dieses vorausgesezt, so läßt sich beweisen, daß

$$\delta\,\Sigma^n V = \Sigma^n\,\delta\,V$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\delta\,\Sigma^2 V &= \delta\,\Sigma\,(\Sigma\,V)\\ &= \Sigma\,\delta\,(\Sigma\,V)\\ &= \Sigma\,\Sigma\,\delta\,V\\ &= \Sigma^2\,\delta\,V\end{aligned}$$

Eben so ist

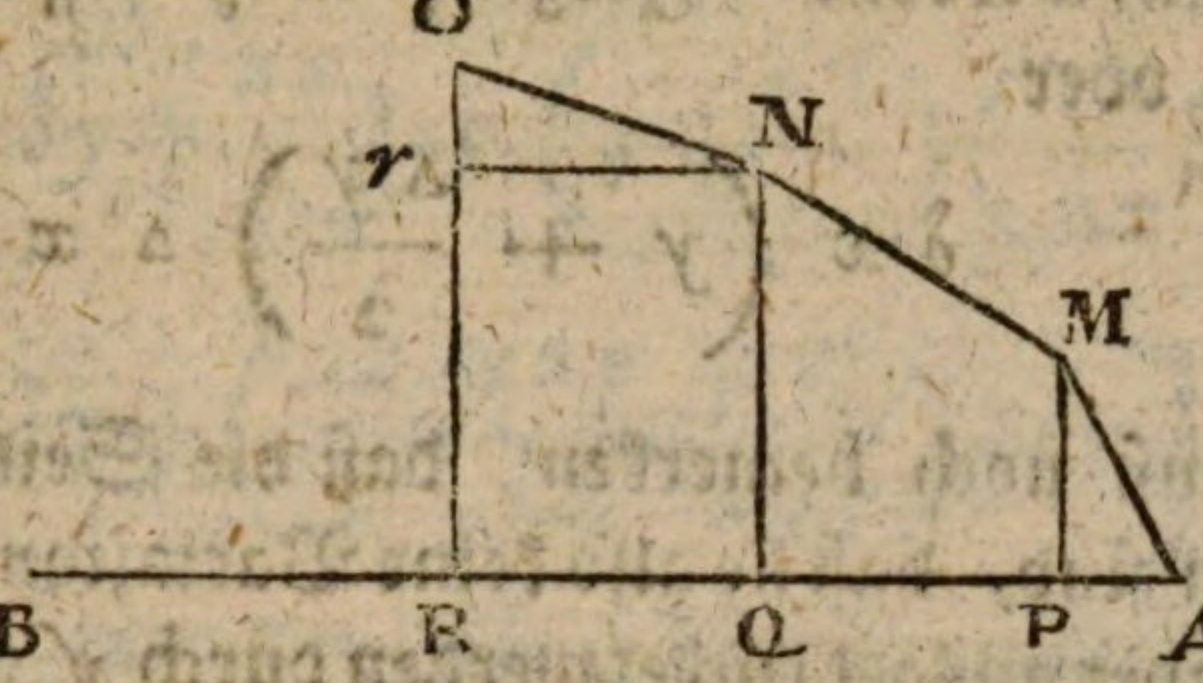
$$\begin{aligned}\delta\,\Sigma^3 V &= \delta\,\Sigma\,(\Sigma^2\,V)\\ &= \Sigma\,\delta\,(\Sigma^2\,V)\\ &= \Sigma\,\Sigma^2\,\delta\,V\\ &= \Sigma^3\,\delta\,V\end{aligned}$$

Desgleichen ist

$$\begin{aligned}\delta\,\Sigma^4 V &= \delta\,\Sigma\,(\Sigma^3\,V)\\ &= \Sigma\,\delta\,(\Sigma^3\,V)\\ &= \Sigma\,\Sigma^3\,\delta\,V\\ &= \Sigma^4\,\delta\,V\end{aligned}$$

und so läßt sich der Beweis ins Unendliche fortsetzen.

§. 18.



Aufgabe.

Von allen Vielecken, die man mit der nemlichen Anzahl gegebener Seiten bilden kann, welches ist dasjenige, was die grösste Fläche hat?

Auflösung. Wenn wir eines von diesen Vielecken, welches nicht das grösste ist, P nennen, so ist das nächst grössere $P + \delta P$. Wenn wir aber bis an das grösste gekommen sind, so wird die Variazion negativ, da sie vorher positiv war, welches voraussetzet, daß sie erstlich null geworden ist. Wenn also π das grösste Polygon ist, welches man mit einer gegebenen Anzahl gegebener Seiten bilden kann, so wird $\delta\pi = o$. Aus den Winkeln M, N, O dieses Vieleckes ziehe ich auf eine gerade Linie AB die senkrechten Linien MP, NQ, OR, u. s. f. Ich betrachte nun eines der Trapezen wie z. E. NQRO, und benenne AQ mit x und QN mit y, so wird $QR = \Delta x$, $rO = \Delta y$, und die Fläche des Trapezen wird

$$\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x$$

Weil nun das Vieleck aus lauter solchen Trapezen bestehet, so ist es gleich

$$\Sigma\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x$$

und soll es das größte mögliche seyn, so muß $\Sigma\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$ ein Maximum werden. Folglich muß dessen Variazion null seyn, oder

$$\delta\,\Sigma\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = o$$

Man muß noch bemerken, daß die Seiten des Vieleckes gegeben sind, daß sie also keine Variazion leiden. Jede Seite kann aber ausgedrücket werden durch $\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$. Folglich ist auch

$$\delta\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)} = o$$

oder $\delta(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{1}{2}} = o$

$$\tfrac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2)^{-\frac{1}{2}}\,\delta(\Delta x^2+\Delta y^2) = o$$

$$\tfrac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2)^{-\frac{1}{2}}(2\Delta x\delta\Delta x+2\Delta y\delta\Delta y) = o$$

$$(\Delta x^2+\Delta y^2)^{-\frac{1}{2}}(\Delta x\delta\Delta x+\Delta y\,\delta\Delta y) = o$$

$$\Delta x\delta\Delta x+\Delta y\,\delta\Delta y = o$$

$$\delta\Delta x \;\;\cdot\;\; \cdot = -\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y$$

Laßt uns nun die Gleichung

$$\delta\,\Sigma\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = o$$

wiederum vornehmen. Man kann sie also verändern

$$\Sigma\delta\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x = o$$

$$\Sigma\left[\Delta x\delta\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)+\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\delta\Delta x\right] = o$$

$$\Sigma\left[\Delta x\delta y+\frac{\Delta x}{2}\delta\Delta y+\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\delta\Delta x\right] = o$$

Man

Man setze anstatt $\delta\Delta x$ dessen Werth $-\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y$

so kömmt

$$\Sigma\left[\Delta x\delta y+\frac{\Delta x}{2}\delta\Delta y-\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\delta\Delta y\right)\right]=o$$

oder $\Sigma\left[\Delta x\delta y+\left(\frac{\Delta x}{2}-\frac{y\Delta y}{\Delta x}-\frac{\Delta y^2}{2\Delta x}\right)\delta\Delta y\right]=o$

Oder, wenn man der Kürze halben annimmt

$$\frac{\Delta x}{2}-\frac{y\Delta y}{\Delta x}-\frac{\Delta y^2}{2\Delta x}=\psi,\text{ so ist}$$

$$\Sigma(\Delta x\delta y+\psi\delta\Delta y)=o$$

Anstatt Δy schreibe ich nun $y'-y$, so kömmt

$$\Sigma[(\Delta x-\psi)\delta y+\psi\delta y']=o$$

Es sey $(\Delta x-\psi)\delta y+\psi\delta y'=V$

so ist $'V=(\Delta' x-'\psi)\delta' y+'\psi\delta y$

$$''V=(\Delta'' x-''\psi)\delta'' y+''\psi\delta' y$$

$\&c.$

Und weil $\Sigma V='V+''V+\&c.$

so bekomme ich die Gleichung

$$'\psi\delta y-('\psi-''\psi-\Delta' x)\delta' y-(''\psi-'''\psi-\Delta'' x)\delta'' y$$
$$-('''\psi-''''\psi-\Delta''' x)\delta''' y-\&c=o$$

oder

$$'\psi\delta y-\Delta('\psi-x)\delta' y-\Delta(''\psi-'x)\delta'' y-$$
$$\Delta(''\psi-''x)\delta''' y-\&c.=o$$

Wir wollen der Größe ΣV eine gewisse Ausdehnung geben, und y soll die Ordinate seyn, die zum Ende dieser Summe gehöret. Nichts hindert uns aber, anzunehmen, daß die Axe AB das Vieleck so schneidet, daß die Ordinate, die zum Anfang und die zum Ende von ΣV gehöret, samt ihren Variazionen, null seyen. In dieser Voraussetzung wird vorige Gleichung

$$\Delta({}''\psi - {}'x)\delta' y + \Delta({}'''\psi - {}''x)\delta'' y + \Delta({}^{\prime v}\psi - {}'''x)\delta''' y + \&c. = o$$

Weil nun diese Gleichung Statt finden muß, wie auch die Variazion beschaffen sey, die durch δ angedeutet wird, so bekömmt man $\Delta({}''\psi - {}'x) = o$

$$\Delta({}'''\psi - {}''x) = o$$

$$\Delta({}^{\prime v}\psi - {}'''x) = o$$

u. s. f.

Folglich ist überhaupt $\psi - x' = f$

wo f eine willkürliche beständige Größe bedeutet. Oder, wenn man $x + \Delta x$ anstatt x' und anstatt ψ dessen Werth setzet, so bekömmt man

$$x + \frac{\Delta x}{2} + \frac{y\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} + f = o\,!$$

Ich multiplizire diese Gleichung mit Δx, so kömmt

$$x\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + y\Delta y + \frac{\Delta y^2}{2} + f\Delta x = o$$

Nun summire ich jeden Satz, wie oben gelehret worden, so bekomme ich $x^2 + y^2 + 2fx = g^2$

Diese Gleichung drücket einen Zirkel aus, dessen Mittelpunkt in der Axe AB lieget. Daher erhellet, daß das

größte Vieleck, welches man aus gegebenen Seiten bilden kann, dasjenige ist, welches man in einen Zirkel einschreiben kann. Man kann auch den Schluß der Rechnung folgender Maaßen einrichten.

Wenn man $\delta \Delta y$ in $\Delta \delta y$ verwandelt, so bekömmt man die Gleichung

$$\Sigma (\Delta x \delta y + \psi \Delta \delta y) = o$$

Es ist aber $\Sigma \psi \Delta \delta y = \psi \delta y - \Sigma \Delta \psi \delta y' = \psi \delta y - \Sigma \Delta' \psi \delta y$,

denn in der Reihe $\Delta' \psi \delta y$, $\Delta \cdot \psi \delta y'$, &c. kann man die Summe nehmen von welchem Satze man will, wenn nur die Summe gehörigermaßen gesuchet wird. Folglich wird unsere Gleichung

$$\psi \delta y - \Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y = \text{einer best. Größe}$$

Es ist auch leicht einzusehen, daß diese beständige Größe dasjenige ist, was $\psi \delta y$ wird, wenn $\Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y = o$ wird. Benennen wir also mit a die Ordinate, die zu diesem Punkte gehöret, und A dasjenige was ψ wird, wenn $y = a$, so bekommen wir die Gleichung

$$\psi \delta y - \Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y = A \delta a$$

Ferner wollen wir der Summe $\Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y$ eine gewisse bestimmte Ausdehnung geben; wir wollen durch b die Ordinate ausdrücken, die zum Ende dieser Summe gehöret, und durch B dasjenige was ψ wird, wenn $y = b$, so wird vorige Gleichung

$$B \delta b - \Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y = A \delta a.$$

Laßt uns wiederum annehmen, daß die Axe AB das Vieleck so schneide, daß a und b null seyen, sowohl als δa und δb, so wird unsere Gleichung

$$\Sigma \Delta ('\psi - x) \delta y = o$$

wel-

welches überhaupt giebet

$$'\psi - x \text{ oder } \psi - x' = \text{best. Gr.}$$

Dieses Resultat stimmet mit demjenigen vollkommen überein, was wir vorher auf eine andere Art gefunden haben.

§. 19.

Was wir vorher bewiesen haben, ist nicht minder wahr, wenn man anstatt endlicher Differenzen unendlich kleine annimmt. Folglich ist $\delta \mathrm{d} z = \mathrm{d} \delta z$, nemlich die Variazion des Differenzials jeder Funkzion z, ist gleich dem Differenziale der Variazion der nemlichen Funkzion. Daraus folget ferner

$$\delta \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d} \delta \mathrm{d} z = \mathrm{d}^2 \delta z$$

$$\delta \mathrm{d}^3 z = \mathrm{d} \delta \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^2 \delta \mathrm{d} z = \mathrm{d}^3 \delta z$$

$$\delta \mathrm{d}^4 z = \mathrm{d} \delta \mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}^2 \delta \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}^3 \delta \mathrm{d} z = \mathrm{d}^4 \delta z$$

&c. &c.

Aus dem nemlichen Grunde ist

$$\delta \int^{\varepsilon} \mathrm{d} x = \int \delta \left(^{\varepsilon} \mathrm{d} x\right)$$

$$\delta \int\int^{\varepsilon} \mathrm{d} x^2 = \int \delta \int^{\varepsilon} \mathrm{d} x^2 = \int\int \delta \left(^{\varepsilon} \mathrm{d} x^2\right)$$

wo $\int^{\varepsilon} \mathrm{d} x$ irgend eine Integral-Formel vorstellet.

§. 20.

Die Variazions-Rechnung ist wesentlich von der Differenzial-Rechnung unterschieden. Diese letztere richtet sich nach bestimmten und unveränderlichen Gesetzen; da hingegen die Gesetze der ersteren willkürlich sind. In der Variazions-Rechnung kann man annehmen, daß eine Applikate variire, obgleich die zustimmende Abzisse unverändert bleibet; man kann auch annehmen, daß nur ein gewisser

wisser Theil der krummen Linie variire, und dann muß man nur diejenigen Applikaten variiren, welche darzu gehören. Ohnerachtet dieses wesentlichen Unterschiedes zwischen beiden Rechnungs-Arten, so sind doch die Regeln derselben einerlei. Denn wie auch die Differenz beschaffen seyn möge, die durch Δ angezeiget wird, so ist allemal, wenn sie unendlich klein wird, $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y$. Wenn also ∂ das Zeichen der Differenzial-Rechnung und δ das Zeichen der Variazions-Rechnung ist, so hat man

sowohl $\partial(xy) = y\partial x + x\partial y$

als auch $\delta(xy) = y\delta x + x\delta y$

Nur muß man bemerken, daß in dem Falle, wo eine der veränderlichen Größen, z. E. x nicht variiren soll, $\delta x = o$ werde. In diesem Falle bleibet also nur noch übrig $\delta(xy) = x\delta y$.

Ueberhaupt, wenn die Variazion einer Funkzion verlanget wird, so darf man nur die Funkzion differenziren, und in jedem Satze δ anstatt ∂ schreiben. Sollen aber einige veränderliche Größen nicht variiren, so verschwinden diejenigen Sätze, welche mit den Variazionen derselben multiplizirt sind. Sollen hingegen einige Größen, welche beym Differenziren als beständig betrachtet werden, eine Variazion bekommen, so werden sie beim Variiren als veränderlich betrachtet, woher dann neue Sätze entstehen, die nicht im Differenziale der Funkzion vorhanden sind.

§. 21.

Es sey c irgend eine Funkzion der veränderlichen Grössen y, x und der Verhältnisse $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, $\frac{\partial q}{\partial x} = r$, $\frac{\partial r}{\partial x} = s$, &c. Es soll die Variazion dieser Funkzion gefunden werden.

Da

Da ζ eine Funkzion von y, x, p, q, r, s, &c. ist, so enthält das Differenzial dieser Funkzion die Differenziale der veränderlichen y, x, p, q &c. jedes mit einer Funkzion der nemlichen Größen multiplizirt. Folglich ist

$$\delta\zeta = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + S\delta s + \&c.$$

wo M, N, P, Q, R, S &c. lauter Funkzionen von x, y, p, q, &c. oder von einigen dieser Größen sind. Nehmen wir nun an, daß alle veränderliche Größen variiren sollen, so bekommen wir ebenfalls

$$\vartheta\zeta = M\vartheta x + N\vartheta y + P\vartheta p + Q\vartheta q + R\vartheta r + S\vartheta s + \&c$$

Nun müssen die Werthe ϑp, ϑq, ϑr, ϑs, &c. bestimmet werden.

$$p = \frac{\delta y}{\delta x} \text{ giebt } \vartheta p = \frac{\delta x\vartheta\delta y - \delta y\vartheta\delta x}{\delta x^2} = \frac{\delta\vartheta y - p\delta\vartheta x}{\delta x}$$

$$q = \frac{\delta p}{\delta x} \text{ giebt } \vartheta q = \frac{\delta x\vartheta\delta p - \delta p\vartheta\delta x}{\delta x^2} = \frac{\delta\vartheta p - q\delta\vartheta x}{\delta x}$$

$$r = \frac{\delta q}{\delta x} \text{ giebt } r = \frac{\delta x\vartheta\delta q - \delta q\vartheta\delta x}{\delta x^2} = \frac{\delta\vartheta q - r\delta\vartheta x}{\delta x}$$

$$s = \frac{\delta r}{\delta x} \text{ giebt } \vartheta s = \frac{\delta x\vartheta\delta r - \delta r\vartheta\delta x}{\delta x^2} = \frac{\delta\vartheta r - s\delta\vartheta x}{\delta x}$$

und so immer weiter

§. 22.

Nicht so leicht ist es die Variazion einer Formel zu finden, welche unter dem Integral-Zeichen stehet, z. E. $\int\zeta\delta x$, wo ζ wiederum eben solche Funkzion vorstellet als vorher

Es ist $\vartheta\int\zeta\delta x = \int\vartheta(\zeta\delta x) = \int(\delta x\vartheta\zeta + \zeta\delta\vartheta x)$. $= \int\zeta\delta\vartheta x + \int\delta x\vartheta\zeta$. Nun ist $\int\zeta\delta\vartheta x = \zeta\vartheta x -$

$\int\delta$

$\int \delta \varepsilon \delta x$. Denn es sey $\int \varepsilon \delta \delta x = \varepsilon \delta x + U$, so ist, wenn man differenziret $\varepsilon \delta \delta x = \varepsilon \delta \delta x + \delta \varepsilon \delta x + \delta U$, oder $o = \delta \varepsilon \delta x + \delta U$, daher $\delta U = -\delta \varepsilon \delta x$, und $U = -\int \delta \varepsilon \delta x$, daher $\int \varepsilon \delta \delta x = \varepsilon \delta x - \int \delta \varepsilon \delta x$.

Es war $\delta \int \varepsilon \delta x = \int \varepsilon \delta \delta x + \int \delta x \delta \varepsilon$. Da nun gefunden worden $\int \varepsilon \delta \delta x = \varepsilon \delta x - \int \delta \varepsilon \delta x$, so ist $\delta \int \varepsilon \delta x = \varepsilon \delta x - \int \delta \varepsilon \delta x + \int \delta x \delta \varepsilon$ oder $\delta \int \varepsilon \delta x = \varepsilon \delta x + \int (\delta x \delta \varepsilon - \delta \varepsilon \delta x) = \varepsilon \delta x + \int [N (\delta x \delta y - \delta y \delta x) + P (\delta x \delta p - \delta p \delta x) + Q (\delta x \delta q - \delta q \delta x) + \&c. + \&c.]$

Wir wollen der Kürze halben annehmen, es sey $\delta y - p \delta x = \delta y$ &c. so kömmt

$$\delta x \delta y - \delta y \delta x = \delta x \, dy$$

$$\begin{aligned} \delta x \delta p - \delta p \delta x &= \delta \delta y - p \delta \delta x - \delta p \delta x \\ &= \delta (\delta y - p \delta x) \\ &= \delta \, d \, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x \delta q - \delta q \delta x &= \delta \delta p - q \delta \delta x - \delta q \delta x \\ &= \delta (\delta p - q \delta x) \\ &= \delta \left(\frac{1}{\delta x} \delta \, d \, y \right) \end{aligned}$$

&c. &c.

Folglich ist

$$\delta \int \varepsilon \delta x = \varepsilon \delta x + \int \left[N \delta x \, dy + P \delta \, dy + Q \delta \left(\frac{1}{\delta x} \delta dy \right) + \&c. + \&c. \right]$$

Ferner wird man finden, vermöge einer Verwandlung, wovon wir schon Gebrauch gemachet haben,

$$\int P\,\partial\,dy = P\,dy - \int \partial P\,dy$$

$$\int Q\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\,dy\right) = \frac{1}{\partial x} Q\,\partial dy - \int \frac{1}{\partial x}\,\partial Q\,\partial dy$$

$$= \frac{1}{\partial x} Q\,\partial dy - \frac{1}{\partial x}\,\partial Q\,dy + \int \partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial Q\right) dy$$

$$\int R\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\,dy\right)\right) = \frac{1}{\partial x} R\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\,dy\right) - \int \frac{1}{\partial x}\,\partial R\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{\partial x} R\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\,dy\right) - \frac{1}{\partial x^2}\,\partial R\,\partial dy + \int \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial R\right)\partial dy$$

$$= \frac{1}{\partial x} R\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial dy\right) - \frac{1}{\partial x^2}\,\partial R\,\partial dy + \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{f}{\partial x}\,\partial R\right) dy - \int \partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial R\right)\right) dy$$

&c. &c. &c. &c.

Wenn

Wenn man alle diese Werthe substituiret, so bekömmt man $\delta \int \varepsilon \, dx =$ einer beständigen Größe +

$$\int \left(\left(N - \frac{1}{dx} \delta P + \frac{1}{dx} \delta \left(\frac{1}{dx} \delta Q \right) - \frac{1}{dx} \delta \left(\frac{1}{dx} \delta \left(\frac{1}{dx} \delta R \right) \right) + \&c. \right) dx\, dy + \&c. \right)$$

$$+ \varepsilon \delta x + \left(P - \frac{1}{dx} \delta Q + \frac{1}{dx} \delta \left(\frac{1}{dx} \delta R \right) - \&c. \right) dy + \&c.$$

$$+ \left(Q - \frac{1}{dx} \delta R + \&c. \right) \frac{1}{dx} \delta dy + \&c.$$

$$+ \left(R - \&c. \right) \frac{1}{dx} \delta \left(\frac{1}{dx} \delta dy \right) + \&c. + \&c.$$

Wenn man dx für beständig annimmt, so wird der vorige Ausdruck einfacher, und man bekömmt, $\delta \int \varepsilon \, dx =$ einer beständigen Größe +

$$\int \left(\left(N - \frac{1}{dx} \delta P + \frac{1}{dx^2} \delta^2 Q - \frac{1}{dx^3} \delta^3 R + \&c. \right) dx\, dy + \&c. \right)$$

$$+ \varepsilon \delta x + \left(P - \frac{1}{dx} \delta Q + \frac{1}{dx^2} \delta^2 R - \&c. \right) dy + \&c.$$

$$+ \left(Q - \frac{1}{dx} \delta R + \&c. \right) \frac{1}{dx} \delta dy + \&c.$$

$$+ \left(R - \&c. \right) \frac{1}{dx^2} \delta^2 dy + \&c.$$

Wir wollen beide Ausdrücke, welche die Variazion von $\int \varepsilon \, dx$ enthalten, durch $\int \psi + \Pi + C$ vorstellen. Hier soll ψ alle Sätze bedeuten, die unter dem Integralzeichen stehen,

Π alle diejenigen, die nicht das Integral-Zeichen vor sich haben, und C eine beständige Größe. Hierbei ist zu merken, das $\int \psi$ nicht weiter reduziret werden kann.

§. 23.

Wenn $\int \mathfrak{E}\, dx$ ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, $\int$ muß dessen Variazion null seyn, das heißt, $\int \mathfrak{E}\, dx = o$, oder weil angenommen worden, $\delta \int \mathfrak{E}\, dx = \int \psi + \Pi + C$, so muß seyn $\int \psi + \Pi + C = o$, oder $\int \psi + \Pi = C$. Die beständige Größe muß derjenigen Größe gleich seyn, welcher Π gleich wird, wenn $\int \psi = o$. Wenn wir also den Werth von Π beim Anfange des Integrals $\int \psi$ mit (Π) bezeichnen, so ist $\int \psi + \Pi = (\Pi)$. Ferner wenn wir den $\int \psi$ eine gewisse bestimmte Ausdehnung geben, und wenn wir dasjenige, was Π am Ende dieses Integrals wird mit $[\Pi]$ bezeichnen, so bekommen wir zur Gleichung des Maximum oder Minimum $\int \psi + [\Pi] = (\Pi)$.

Es seyen a, b, &c. die Werthe von x, y &c. im Anfange des Integrals $\int \psi$. Es seyen auch f, g, &c. die Werthe der Koordinaten am Ende des nemlichen Integrals. Man kann annehmen, daß die Funkzion $\mathfrak{E}$ die Größen a, b, &c. f, g &c. enthält, und sogar die Verhältnisse $\frac{db}{da} = b'$, $\frac{db'}{da} = b''$ &c, $\frac{dg}{df} = g'$, $\frac{dg'}{df} = g''$ &c. &c. Ob nun gleich diese Größen im Differenziale der Funkzion $\mathfrak{E}$ als beständig betrachtet werden, so haben sie dennoch eine Variazion, und $\delta \mathfrak{E}$ wird nothwendig Sätze von dieser Gestalt enthalten: $A\delta a + B\delta b + B'\delta b' + B''\delta b'' +$ &c. $+ F\delta f + G\delta g + G'\delta g' + G''\delta g'' +$ &c. Hier sind A, B, &c, F, G, &c. Funkzionen aller Größen die in $\mathfrak{E}$ enthalten sind. Hieraus folget, daß $\int dx\, \delta \mathfrak{E}$ diese Sätze enthalten wird: $\delta a \int A\, dx + \delta b \int B\, dx +$ &c. $+ \delta f F\, dx + \delta g \int G\, dx +$ &c. Gesetzet

setzet nun, es seyen (A), (B), &c. (F), (G), &c. die Werthe, welche die Integrale $\int A\,\partial x$, $\int B\,\partial x$ &c. $\int F\,\partial x$, $\int G\,\partial x$, &c, bekommen, wenn man sie so nimmt, daß sie null werden, wenn $x = a$, $y = b$, &c, wenn man annimmt $x = f, y = g$, &c, so bekömmt man anstatt der vorigen Gleichung diese hier

$$\int \psi + [\Pi] + (F)\,\delta f + (G)\,\delta g + \&c.$$
$$= (\Pi) - (A)\,\delta a - (B)\,\delta B - \&c.$$

Laßt uns ferner mit (ε), (P), (Q), (R), &c), bezeichnen, was die Funkzionen ε, P, Q, R, &c, werden, wenn man $x = a$, $y = b$, &c, machet; und mit [ε], [P], [Q], [R], &c, was die nemlichen Funkzionen werden, wenn man $x = f$, $y = g$, &c, machet; so bekommen wir für die Gleichung des Maximum oder des Minimum, $\int \psi =$

$$\left[(\varepsilon)-(A)\right]\delta a+\left[(P)-\frac{1}{\partial a}\partial(Q)+\frac{1}{\partial a}\partial\left(\frac{1}{\partial a}\partial(R)\right)-\&c.\right]db$$
$$-(B)\,\delta b+\&c.$$
$$+\left[(Q)-\frac{1}{\partial a}\partial(R)+\&c.\right]\frac{1}{\partial a}\partial\,db-(B')\,\delta b'+\&c.$$
$$+\left[(R)-\&c.\right]\frac{1}{\partial a}\partial\left(\frac{1}{\partial a}\partial\,db\right)-(B'')\,\delta b''+\&c.$$
$$-\left[[\varepsilon]+(F)\right]\delta f-\left[[P]-\frac{1}{\partial f}\partial[Q]+\frac{1}{\partial f}\partial\left(\frac{1}{\partial f}\partial[R]\right)-\&c.\right]dg$$
$$-(G)\,\delta g-\&c.$$
$$-\left[[Q]-\frac{1}{\partial f}\partial[R]+\&c.\right]\frac{1}{\partial f}\partial dg-(G')\,\delta g'-\&c.$$
$$-\left[[[R]-\&c.\right]\frac{1}{\partial f}\partial\left(\frac{1}{\partial f}\partial dg\right)-(G'')\,\delta g''-\&c.$$

Zum ersten Punkte der krummen Linie, wo $\int \mathfrak{d} x$ ein Maximum oder Minimum wird, gehören die Koordinaten a, b, &c.; zum folgenden Punkte gehören $a + \mathfrak{d} a$, $b + \mathfrak{d} b$, &c. und so fort, bis zum letzten Punkte, wo die Koordinaten f, g, &c. werden. Da aber die Variazion jedes Punktes von der Variazion jedes anderen Punktes ganz unabhängig ist; so muß die vorige Gleichung anfänglich $\psi = o$ geben, welches in der ganzen Ausdehnung des $\int \psi$ Statt findet. Ferner muß sie diese beiden Folgen bestimmter Gleichungen geben, wovon die ersteren zu den ersten Punkten und die anderen zu den letzten Punkten der krummen Linie gehören.

Gleichung (a)

$$\left[(\mathfrak{C}) - (A)\right]\delta a + \left[(P) - \frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}(Q) + \frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}\left(\frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}(R)\right) + \&c.\right] \mathrm{d}b - (B)\delta b + \&c. = o$$

Gleichung (b)

$$\left[(Q) - \frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}(R) + \&c.\right]\frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}\mathrm{d}b - (B')\delta b' + \&c. = o$$

Gleichung (c)

$$\left[(R) - \&c.\right]\frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}\left(\frac{1}{\mathfrak{d}a}\mathfrak{d}\,\mathrm{d}b\right) - (B'')\delta b'' + \&c. = o$$

&c. &c.

Gleichung (a')

$$\left[[\mathfrak{C}] + (F)\right]\delta f + \left[[P] - \frac{1}{\mathfrak{d}f}\mathfrak{d}[Q] + \frac{1}{\mathfrak{d}f}\mathfrak{d}\left(\frac{1}{\mathfrak{d}f}\mathfrak{d}[R]\right) - \&c.\right] \mathrm{d}g + (G)\delta g + \&c. = o$$

Glei-

Gleichung (b')

$$\left[[Q]-\frac{1}{\delta f}\delta[R]+\&c.\right]\frac{1}{\delta f}\delta\delta g+(G')\,g'+\&c.=o$$

Gleichung (c')

$$\left[[R]-\&c.\right]\frac{1}{\delta f}\delta\left(\frac{1}{\delta f}\delta\delta g\right)+(G'')\,\delta g''+\&c.=o$$

&c. &c.

Wenn kein Verhältniß oder keine Beziehung zwischen x, y, &c. gegeben ist, so sind die Variazionen der Koordinaten von einander unabhängig, und die Gleichung $\psi=o$ giebt

Gleichung (A)

$$N-\frac{1}{\delta x}\delta P+\frac{1}{\delta x}\delta\left(\frac{1}{\delta x}\delta R\right)-\frac{1}{\delta x}\delta\left[\frac{1}{\delta x}\delta\left(\frac{1}{\delta x}\delta R\right)\right]+\&c.=o$$

und so ferner. Die Anzahl dieser Gleichungen wird der Anzahl der veränderlichen Größen weniger einer gleich seyn. Und diese eine ist diejenige, deren erste Differenz der Nenner der Verhältnisse p, q, &c. &c. ist

Wenn aber zwischen den veränderlichen Größen y, x, u (denn wir wollen nur drei betrachten) irgend eine Beziehung Statt findet, so daß z. E. $\alpha\delta y+\varepsilon\delta x+\gamma\delta u=o$, so ist auch $\alpha\delta y+\varepsilon\delta x+\gamma\delta u=o$, und $\delta x=-\frac{\alpha}{\varepsilon}\delta y-\frac{\gamma}{\varepsilon}\delta u$. Laßt uns die Gleichung $\psi=o$ vorstellen durch $\pi dy+\pi' dx=o$, und in $dy=\delta y-p\delta x$, $du=\delta u-p'\delta x$, laßt uns anstatt δx dessen Werth setzen, so bekommen wir

$$(\pi\varepsilon+\pi\alpha p+\pi'\alpha p')\delta y+(\pi\gamma p+\pi'\varepsilon+\pi'\gamma p')\delta u=o$$

Anstatt der Gleichungen $\Pi = o$, $\Pi' = o$ bekommen wir diese:

$$\Pi \mathfrak{C} + \Pi \alpha p + \Pi' \alpha p' = o$$

$$\Pi \mathfrak{g} p + \Pi' \mathfrak{C} + \Pi' \mathfrak{g} p' = o$$

Ueberhaupt muß man die Variazionen δy, δx, &c. auf die möglichst kleinste Anzahl reduziren, und hernach den Koeffizienten der bleibenden gleich null machen.

Wir machen über die Gleichungen (a), (b), (c), &c. (a'), (b'), (c'), &c. die nemlichen Anmerkungen, als über $\psi = o$, in Betrachtung der Unabhängigkeit der Variazionen der Größen a, b, &c. f, g, &c. wenn unter denselben keine Beziehung oder kein Verhältniß gegeben ist. Wenn die einzige Bedingung z. E. diese wäre, daß die krumme Linie, für welche $\int \mathfrak{C} \, dx$ ein Maximum oder Minimum seyn soll, von zwei gegebenen krummen Linien begränzet seyn sollte; so würden die Variazionen δa, δb, &c. welche zur krummen Linie gehören, die durch den ersten Punkt gehet, durch die Gleichnng (a) mit einander verbunden seyn. Eben so würden die Variazionen δf, δg, &c. welche zur krummen Linie gehören, die durch den letzten Punkt gehet, vermittelst der Gleichung (a') verbunden seyn. Hingegen müssen die Koeffizienten derjenigen Variazionen, welche in den Gleichungen (b), (c), &c. (b'), (c'), &c. enthalten sind, alle gleich null gemachet werden.

Wenn der erste Punkt der krummen Linie der Ursprung der Abzissen ist, so werden die Größen a, b, &c. alle null, und die Sätze $(A)\delta a$, $(B)\delta b$, &c. verschwinden in den Gleichungen (a), (b), (c), &c. Wenn aber angenommen wird, daß dieser Punkt keine unveränderliche Lage hat, so haben die Koordinaten x, y, &c. eine Variazion, welche derjenigen entgegengesetzet ist, welche sich auf die Bewegung jedes anderen Punktes beziehet. Dieser Umstand führet in δs die Sätze $-M\delta a - N\delta b - \&c.$ ein. Wir ha-

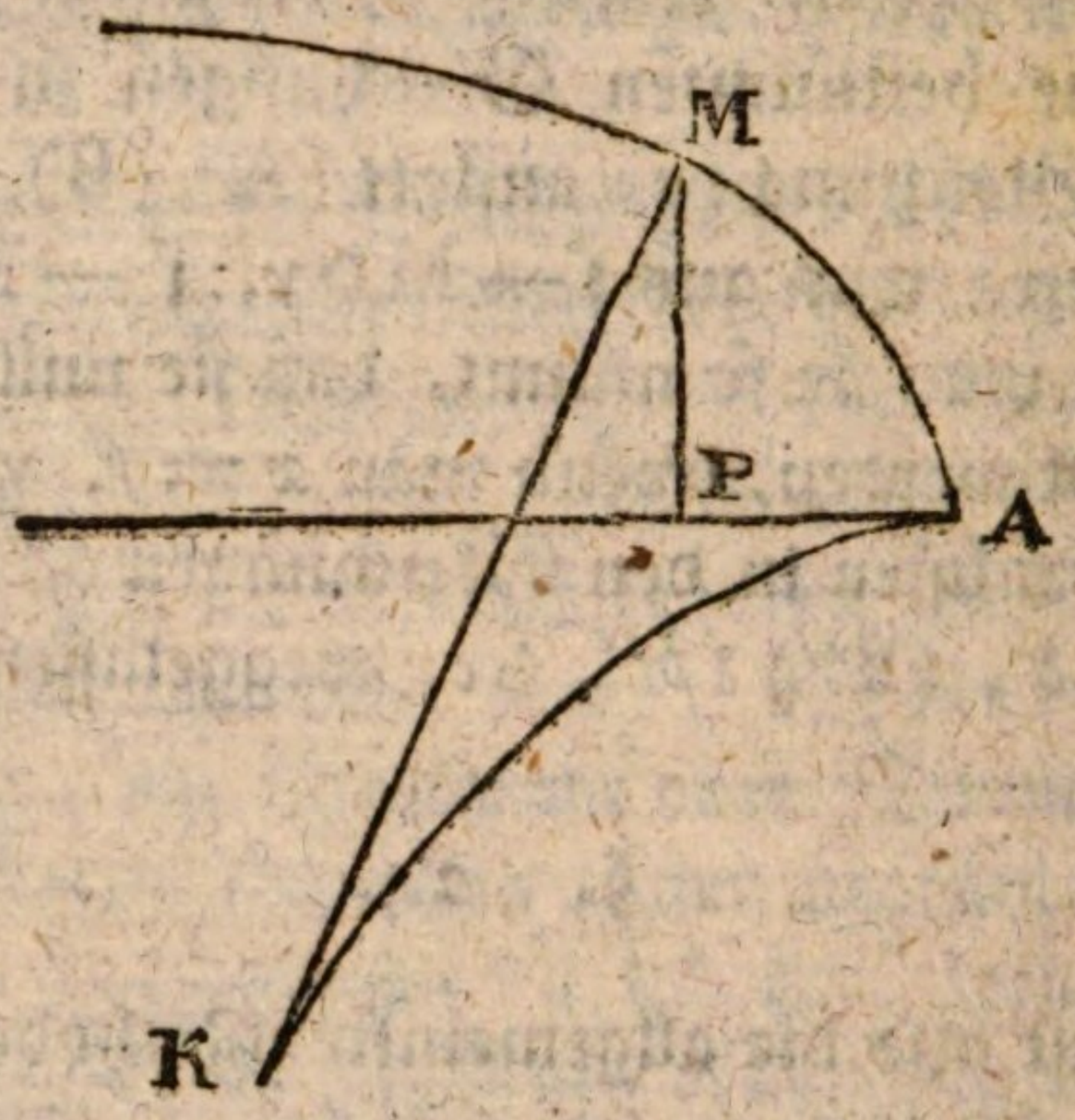
haben durch δa, δb, &c. diejenigen Variazionen von x, y, &c. vorgestellet, welche von der Bewegung des ersten Punktes herrühren. Eben so sollen $\delta\delta a$, $\delta\delta b$, &c. diejenigen Variazionen vorstellen, welche von der Bewegung des zweiten Punktes herrühren, und so mit den übrigen. Man wird leicht einsehen, daß die Variazion des ersten Punktes keines Weges einen Einfluß auf die Variazion der Verhältnisse p, q, &c. hat. Um also in der angenommenen Voraussetzung die bestimmten Gleichungen zu bekommen, so muß in der Gleichung (a) anstatt (A), (B), &c. dasjenige gesetzet werden, was aus $\int -M\delta y$, $\int -N\delta x$, &c. entstehet, wenn man sie so nimmt, daß sie null werden, wenn y, x, &c. null werden, wenn man $x = f$, $y = g$, &c. machet. Ferner müssen in den Gleichungen (b), (c), &c. die Sätze (B′) $\delta b'$, (B″) $\delta b''$, &c. weggelassen werden.

§. 24.

Dieses ist also die allgemeinste Methode, um das Maximum oder Minimum jeder Integral-Formel zu finden. Der berühmte Euler hatte schon diese Aufgabe untersuchet in seiner Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, &c. Herr de la Grange hat diese Untersuchung weiter fortgesetzet in einem Mémoire, welches den Titel führet: *Essai d'une nouvelle Méthode pour determiner les Maxima et les Minima des formules integrales indéfinies.* In dieser Schrift führet er das Zeichen δ ein, um die Variazionen zu bezeichnen. Weil nemlich seine Methode erforderte, daß eine Größe Z sich auf zweierlei Art veränderte, so behielt er für die gemeine Differenz das gewöhnliche Zeichen, bemerkte aber die andere Veränderung oder Variazion mit δ. Herr Cousin in seinen Leçons de Calcul hat die Methode des Herrn de la Grange für weniger geübte Leser etwas mehr auseinander gesetzet, und vorher die Theorie der Variazionen als eine neue Rechnungs-Art vorgetragen. Von ihm habe ich im

gegenwärtigen Hauptstücke dasjenige genommen, was sich auf die Geometrie anwenden läßt. Denn der vornehmste Nutzen der angeführten Methode zeiget sich in der höheren Mechanik. Die folgende Aufgabe wird von der Anwendung derselben auf geometrische Fragen einen Begriff geben.

§. 25.



Aufgabe.

Eine krumme Linie AM finden, die so beschaffen sey, daß die Ebne AKM welche zwischen AM, der Evolute AK und den Halbmesser der Krümmung MK enthalten ist, allemal ein Minimum sey.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, so wird das Element des Raumes $= \frac{MK}{2}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Wenn nun dx beständig ist, so ist $MK = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\mp dx\, d^2y}$ Folglich ist das bemeldete Element $= \frac{(dx^2+dy^2)^2}{\mp 2dx\, d^2y}$ und $\int \frac{dx(1+p^2)^2}{q}$ ist

ist die Integral-Formel, welche ein Minimum werden soll. Also ist hier $\epsilon = \frac{(1+p^2)^2}{q}$, woraus man ziehet,

$$M = o,\ N = o,\ P = \frac{4p(1+p^2)}{q},\ Q = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$$

Die Gleichung $N\,\partial x - \partial P + \frac{1}{\partial x}\partial^2 Q = o$ wird

$$\partial P = \frac{1}{\partial x}\partial^2 Q, \text{ und giebt}$$

$$P = a' + \frac{1}{\partial x}\partial Q, \text{ ferner}$$

$$\partial \epsilon = P\,\partial p + Q\,\partial q$$

Man setze für P dessen Werth so ist $\partial \epsilon = a\,1\,\partial p + q\,\partial Q + Q\,\partial q$. Folglich

$$\epsilon = b' + a'p + qQ$$

$$\text{oder } 2(1+p^2)^2 = b'q + a'pq$$

Weil nun $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, so ist

$$\partial x = \frac{(b' + a'p)\,\partial p}{2(1+p^2)^2}$$

$$\text{und } x = c' - \frac{a' - b'p}{4(1+p^2)^2} + \frac{b'}{4}\int \frac{\partial p}{1+p^2}$$

$$= c' - \frac{a' - b'p}{4(1+p^2)^2} + \frac{b'}{4}\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tg}\,p$$

Man hat auch

$$\mathfrak{d}y = p\,\mathfrak{d}x$$

und $y = px - \int x\,\mathfrak{d}p$

$$= px - c'p + \frac{a'}{4}\mathfrak{AT}p - \frac{b'}{8}\mathfrak{l}(1+p^2) - \frac{b'}{4}[p\mathfrak{AT}p - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}(1+p^2)]$$

denn $\int \mathfrak{d}p\,\mathfrak{AT}p$ oder

$$\int \mathfrak{d}p \int \frac{\mathfrak{d}p}{1+p^2} = p\int \frac{\mathfrak{d}p}{1+p^2} - \int \frac{p\,\mathfrak{d}p}{1+p^2}$$

$$= p\,\mathfrak{AT}p - \tfrac{1}{2}\mathfrak{l}(1+p^2)$$

Also ist $x = c' - \dfrac{a' - b'p}{4(1+p^2)^2} + \dfrac{b'}{4}\mathfrak{AT}p$

und $y = d' - \dfrac{a' - b'p^2}{4(1+p^2)} + \dfrac{a'}{4}\mathfrak{AT}p$

Vermittelst dieser beider Gleichungen schaffe ich $\mathfrak{AT}p$ weg, und wenn ich a'' anstatt $a'c' - b'd'$ schreibe, so kömmt

$$\frac{(a' - b'p)^2}{4(1+p^2)} = a'' - a'x + b'y$$

Anstatt p schreibe ich dessen Werth $\dfrac{\mathfrak{d}y}{\mathfrak{d}x}$, und ich bezeichne mit s den Bogen AM der gesuchten krummen Linie, dadurch verändere ich vorige Gleichung folgendermaßen

$$\mathfrak{d}s = \frac{a'\mathfrak{d}x - b'\mathfrak{d}y}{2\sqrt{(a'' - a'x + b'y)}}$$

woraus

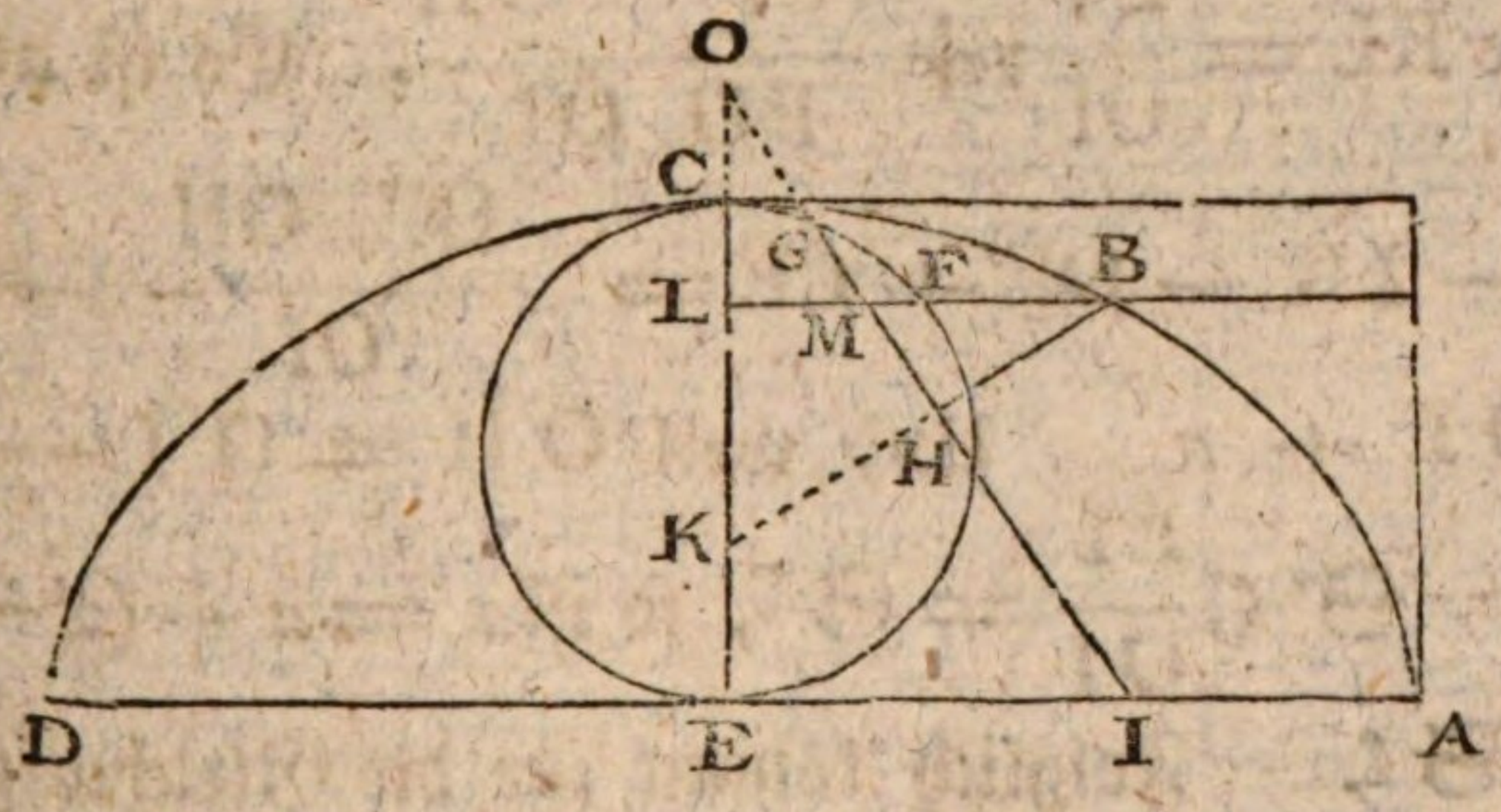
woraus ich leicht ziehen kann

$$s = c' - \sqrt{(a'' - a'x + b'y)}$$

Diese Gleichung gehöret zu einer Zykloide. Die vier willkührliche beständige Größen erfordern, daß die krumme Linie durch vier gegebene Punkte gehe. Von allen krummen Linien also die durch 4 gegebene Punkte gehen können, ist die Zykloide die einzige, welche der Aufgabe Genüge leiste.

Zusatz. Daß die gefundene Gleichung zur Zykloide gehöret, muß hier bewiesen werden, weil sie nicht mit derjenigen übereinstimmet, die wir oben (XV H. § 10 Zusatz) gegeben haben.

Es ist schon bekannt, daß die halbe Zykloide CBA entstehet, wenn der halbe Zirkel CFE dessen Durchmesser EC



über EA senkrecht ist, auf dieser geraden EA roliet, bis daß der Punkt C in A gekommen sey. Es sey $CE = a$, $CL = t$, $LF = u$, $LB = u'$, und der Bogen $CS = s$. Die Eigenschaft des Zirkels giebt $u = \sqrt{(ut - t^2)}$, $du = \frac{(a-2t).\,dt}{2\sqrt{(at-t^2)}}$, $ds = \frac{a\,dt}{2\sqrt{(at-t^2)}}$, und da, vermöge der Entstehungs-Art dieser krummen Linie $BF = s$,

so

so ist $u' = u + s$ und $\partial u' = \frac{\partial t \sqrt{(a-t)}}{\sqrt{t}}$. Laßt uns den Bogen CB der Zykloïde mit S bezeichnen. Weil $\partial S = \sqrt{(\partial t^2 + \partial u'^2)} = \frac{\partial t \sqrt{a}}{\sqrt{t}}$, so ist $S = 2\sqrt{(at)}$.

Nun wollen wir versuchen, eine allgemeinere Gleichung für die Zykloïde zu finden, und vermöge welcher diese krumme Linie in allen Fällen erkannt werden könne. Es sey also G I ($= e$) eine gerade Linie, welche der Axe CE unter einen gewissen Winkel ζ begegnen. Es sey BH über dieser geraden Linie senkrecht. Es sey $GH = x$, $BH = y$. Die ähnlichen Dreiecke OEI, OHK geben $OK = \frac{OI.OH}{OE}$, $HK = \frac{EI.\ OH}{OE}$. Da nun $BK = y + \frac{EI.\ OH}{OE}$, so geben die ähnlichen Dreiecke OEI, BLK ferner $KL = \frac{EI}{OI} y + \frac{(EI)^2.\ OH}{EO.\ OI}$. Es ist aber $CL = OK - LK - OE + CE = \frac{OE.\ OH}{OI} - \frac{EI}{OI} y - OE + a$. Und weil $OH = OI - e + x$, $\frac{OE}{OI} = \mathfrak{S}'\zeta$, $\frac{EI}{OI} = \mathfrak{S}\zeta$, so ist $t = a + (x-e)\mathfrak{S}'\zeta - y\mathfrak{S}\zeta$. Folglich kömmt für die Gleichung der Zykloide

$$S = 2\sqrt{a}\sqrt{[a + (x-e)\mathfrak{S}\zeta - y\mathfrak{S}\zeta]}$$

Wenn die gerade GI mit der Axe CE parallel ist, so so ist $\mathfrak{S}\zeta = 0$, $\mathfrak{S}'\zeta = 1$, und die Gleichung wird

$$S = 2\sqrt{a}\sqrt{(a - e + x)}$$

Wenn

Wenn die gerade GI aus dem Scheitel G entspringet, so ist $a - e\,S\,\epsilon = o$, und die Gleichung wird

$$S = 2\sqrt{a}\sqrt{(x\,S'\,\epsilon - y\,S\,\epsilon)}$$

Und in dem Falle wo $S\,\epsilon = o$, $S'\,\epsilon = 1$, bekömmt man

$$S = 2\sqrt{(a\,x)}$$

Die allgemeine Gleichung der Zykloïde, die wir gefunden haben, ist nur bloß in Betrachtung der beständigen Größen von denjenigen unterschieden, worauf uns die Auflösung der vorigen Aufgabe führte. Daher denn folget, daß diese nichts anders als eine Zykloïde vorstellet.

§. 26.

In einigen Aufgaben wird angenommen, daß die krummen Linien gewisse Eigenschaften haben, die ihnen gemeinschaftlich zugehören. Z. E. Es werde angenommen, daß die krummen Linien alle diese Eigenschaft haben, daß eine Integral-Formel wie $\int \lambda\, dx$ eine beständige Größe sey, und es werde unter denselben diejenige verlanget, für welche $\int \epsilon\, dx$ ein Maximum oder ein Minimum wird. So hat man diese beiden Gleichungen $\delta \int \epsilon\, dx = o$, und $\delta \int \lambda\, dx = o$. Um nicht in Weitläuftigkeiten zu verfallen, so wollen wir annehmen, es seyen nur zwei veränderliche Größen x und y. So können wir diese beiden Gleichungen vorstellen durch

$$\&c. + {}'\pi\, d'y + \pi\, dy + \pi'\, dy' + \&c. = o$$

und

$$\&c. + {}'\Sigma\, d'y + \Sigma\, dy + \Sigma'\, dy' + \&c. = o$$

Diese beiden Gleichungen müssen mit einander verbunden werden. Deswegen multiplizire ich die erste mit σ, und addire sie darauf zur zweiten, so kömmt

$$\&c. + (\sigma'\pi + {}'\Sigma).\, d'y + (\sigma\pi + \Sigma).\, dy + (\sigma\pi' + \Sigma').\, dy' + \&c. = o,$$

Jezt

Jetzt kann ich den Koeffizienten jedes dy gleich null machen. Da aber σ allein unbekannt ist, so nehmen wir, um die Beschaffenheit der verlangten krummen Linie zu bestimmen, nur diese beiden Gleichungen $\sigma\Pi + \Sigma = o$, $\sigma\Pi' + \Sigma' = o$. Daraus bekömmt man $\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{\Pi'}{\Pi}$ oder $\frac{\partial\Sigma}{\Sigma}$ $\frac{\partial\Pi}{\Pi}$. Folglich $a\,l\,\Sigma = \Pi$, welches die Gleichung der verlangten krummen Linie ist. Laßt uns annehmen, daß die krummen Linien, wovon die Frage ist, noch diese gemeinschaftliche Eigenschaft haben, daß die Integral-Formel $\int \mu\,\partial x$ eine beständige Größe sey. So haben wir diese drei Gleichungen $\partial \int \varepsilon\,\partial x = o$, $\partial \int \lambda\,\partial x = o$, $\partial \int \mu\,\partial x = o$, welche durch diese drei andern vorgestellet werden können.

$$\&c. + {}'\Pi\,d'y + \Pi\,dy + \Pi'\,dy' + \&c. = o$$

$$\&c. + {}'\Sigma\,d'y + \Sigma\,dy + \Sigma'\,dy' + \&c. = o$$

$$\&c. + {}'\mathrm{T}\,d'y + \mathrm{T}\,dy + \mathrm{T}'\,dy' + \&c. = o$$

Man multiplizire die erste mit σ, die zweite mit τ, und addire sie zur dritten, so kömmt

$$\&c. + (\sigma'\Pi + \tau'\Sigma + {}'\mathrm{T})\,d'y + (\sigma\Pi + \tau\Sigma + \mathrm{T})\,dy + (\sigma\Pi' + \tau\Sigma' + \mathrm{T}')\,dy' + \&c. = o$$

Man mache hernach die drei Gleichungen

$$\sigma'\Pi + \tau'\Sigma + {}'\mathrm{T} = o$$

$$\sigma\Pi + \tau\Sigma + \mathrm{T} = o$$

$$\sigma\Pi' + \tau\Sigma' + \mathrm{T}' = o$$

Man sondere σ und τ ab, so daß sie aus diesen Gleichungen verschwinden, so wird man bekommen

$$\left(\frac{\Sigma'}{\Pi'} - \frac{'\Sigma}{\Pi}\right)\left(\frac{T}{\Pi} - \frac{'T}{'\Pi}\right) = \left(\frac{\Sigma}{\Pi} - \frac{'\Sigma}{'\Pi}\right)\left(\frac{T'}{\Pi'} - \frac{T}{\Pi}\right)$$

oder $$\delta\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right)\delta^2\left(\frac{T}{\Pi}\right) = \delta\left(\frac{T}{\Pi}\right)\delta^2\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right)$$

Wenn man integriret, so wird man finden

$$\delta\left(\frac{T}{\Pi}\right) = a'\,\delta\left(\frac{\Sigma}{\Pi}\right), \text{ und}$$

$$\frac{T}{\Pi} = b' + a'\frac{\Sigma}{\Pi}$$

Ohne daß es nöthig sey, diese Rechnung weiter fortzusetzen, so kann man folgende Regel als allgemein annehmen.

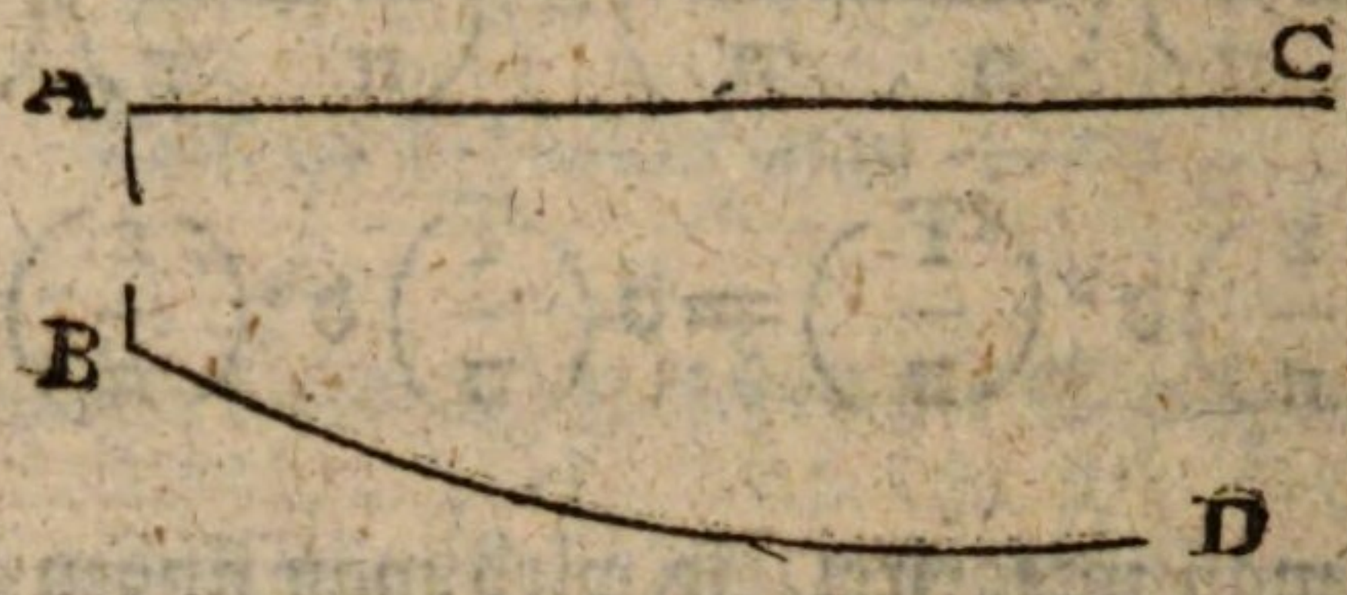
Man suche, vermöge der vorher gegebenen Methoden, für jede Eigenschaft, den Koeffizienten, den man $= o$ machen müste, wenn diese Eigenschaft die einzige wäre. Man multiplizire alle diese Koeffizienten weniger einen, jeden mit einer beständigen Größe. Man mache das Aggregat und mache sie $= o$, so hat man die Gleichung der verlangten krummen Linie. Diese Regel wird noch einleuchtender werden, wenn wir sie auf besondere Fälle anwenden.

§. 27.

Aufgabe.

Unter allen krummen Linien von gleicher Länge wird die krumme Linie BD verlanget, welche bei ihrer

ihrer Umwendung um ihre Axe AC entweder die größte oder die kleinste Fläche beschreibet.



Auflösung. Die allgemeine Eigenschaft aller dieser Linien, ist, daß sie eine gleiche Länge haben sollen. Also ist die Variazion der Länge null oder $\delta \int \delta x \sqrt{(1+p^2)} = o$ und der Koeffizient, der da null würde, wenn diese einzige Eigenschaft Statt fände, ist $\delta\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$. Aber die verlangte Linie soll in ihrer Umwendung um die Axe AC eine Fläche beschreiben, die ein Maximum oder ein Minimum sey, also ist auch $\delta \int y \delta x \sqrt{(1+p^2)} = o$, und der Koeffizient, der da null würde, wenn diese einzige Eigenschaft Statt fände, ist $\delta x \sqrt{(1+p^2)} - \delta\left(\frac{py}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$

Folglich ist die verlangte Gleichung

$$a'\delta\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)+\delta x\sqrt{(1+p^2)}-\delta\left(\frac{py}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=o$$

Dieser Gleichung gebe ich folgende Gestalt

$$(a'-y)\delta\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)-\frac{p\delta y}{\sqrt{(1+p^2)}}+\delta x\sqrt{(1+p^2)}=o$$

Wenn man $p\delta x$ anstatt δy setzet, so ist

$$(a'-y)\delta\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)+\frac{\delta x}{\sqrt{(1+p^2)}}=o$$

Wenn

Wenn man m't p multipliziret, und im zweiten Satze ∂y anstatt $p\,\partial x$ setzet,

$$p\sqrt{(1+p^2)}\,\partial\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)+\frac{\partial y}{a'-y}=0$$

Um den ersten Satz zu integriren, setze ich $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=u$, so kömmt

$$p\sqrt{(1+p^2)}\,\partial\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=\frac{u\,\partial u}{1-u^2}$$

Hiervon ist das Integral $-\frac{1}{2}l(1-u^2)$, folglich ist $(1-u^2)(a'-y)=b'$

woraus man ziehet $\frac{b'}{1-u^2}=a'-y$

oder $b'\sqrt{(1+p^2)}=a'-y$

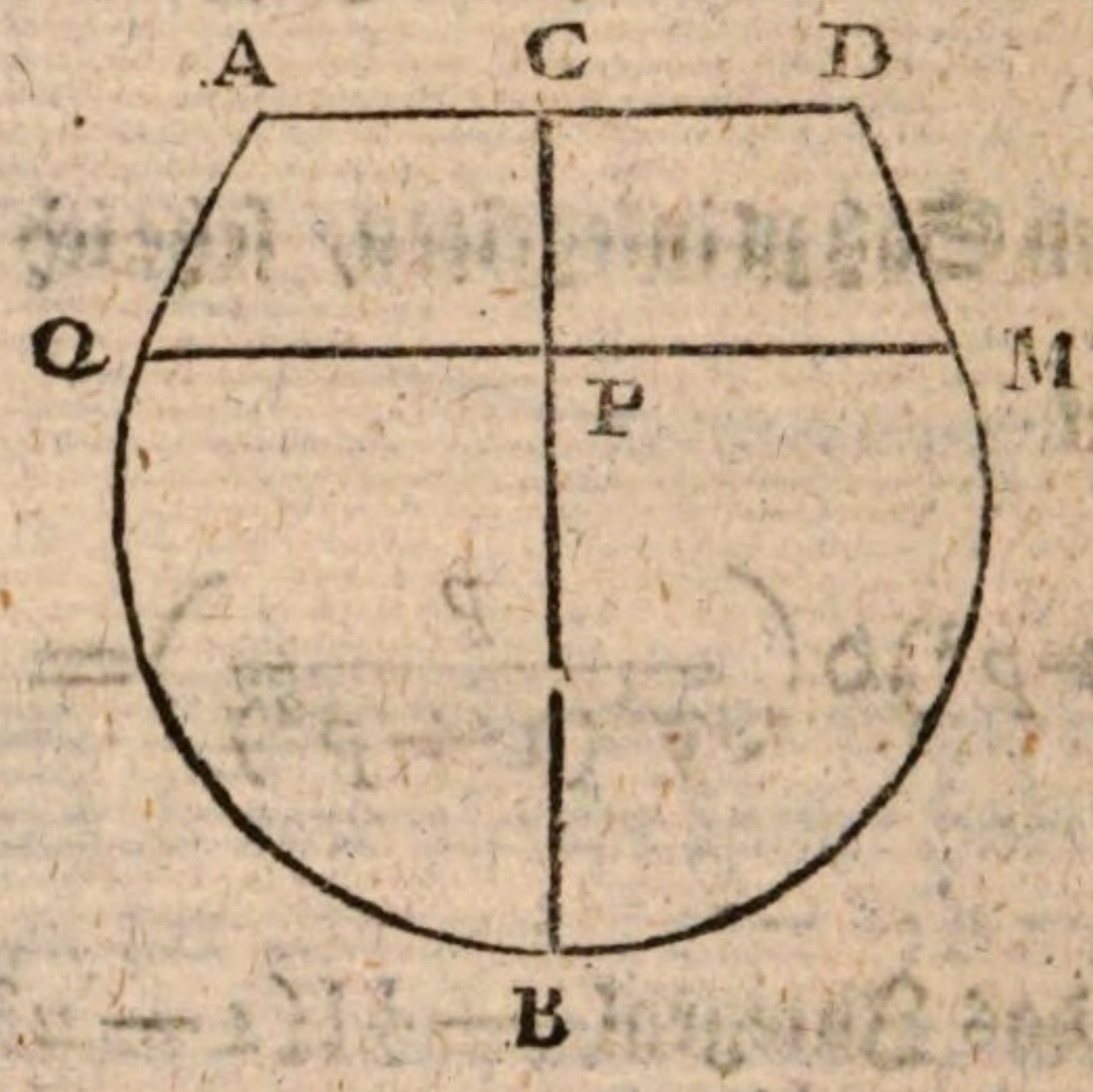
Diese Gleichung giebt

$$\partial x=\frac{b'\,\partial y}{\sqrt{(a'-y)^2-b'^2}}$$

Diese Gleichung drücket eine Kettenlinie aus, das ist eine Linie, welche durch eine gleichdicke Kette gebildet wird, welche an ihren beiden Enden aufgehänget ist, wie in der Mechanik bewiesen wird.

§. 28.

Aufgabe.



Unter allen krummen Linien, die zur nemlichen Abzisse BC gehören, die die nemliche Länge haben, und die den nemlichen Raum ABD einschließen, soll diejenige gefunden werden, welche bei ihrer Umwendung um die Axe BC den Körper beschreibet, der die größte oder kleinste Solidität hat.

Auflösung. Es sey $BP = x$, $PM = y$, so werden die gemeinen Eigenschaften aller dieser krummen Linien durch folgende bede Gleichungen ausgedrücket

$$\delta \int y \, \partial x = 0$$

$$\delta \int y \, \partial x \sqrt{(1 + p^2)} = 0$$

es ist auch

$$\delta \int y^2 \, \partial x = 0$$

Die Koeffizienten, die da null werden müßten, wenn jede dieser Eigenschaften allein Statt fände, sind

$$\partial x$$

$$\partial\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$$

$$2\,y\,\partial\,x$$

Man mache also diese Gleichung

$$\partial\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=b'\partial x+2a'y\partial x$$

Man multiplizire mit p

$$p\partial\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=b'\partial y+2a'y\partial y$$

Man setze $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=u$, so wird

$$p\partial\left(\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)=\frac{u\partial u}{\sqrt{(1-u^2)}}$$

und das Integral des ersten Gliedes unserer Gleichung wird

$$-\sqrt{(1-u^2)}\text{ oder }\frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

Also ist $\frac{-1}{\sqrt{(1+p^2)}}=c'+b'y+a'y^2$

und $p\left(=\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\sqrt{[1-(c'+b'y+a'y^2)^2]}}{c'+b'y+a'y^2}$

woraus man ziehet

$$dx = \frac{(c' + b'y + a'y^2)\,dy}{\sqrt{[1 - (c' + b'y + a'y^2)^2]}}$$

Wegen der Zweideutigkeit des Zeichens $\pm$ welches allemal vor dem Wurzelzeichen zu stehen kömmt, hat man zwei krumme Linien, wovon die eine das Maximum und die andere das Minimum ist. Diese krummen Linien heißen elastische Linien, weil in der Mechanik bewiesen wird, daß eine elastische und gleichförmige Klinge, die im Punkte B gegen einen unbeweglichen Widerstand gestützet ist, und deren Enden A und D vermittelst einer unbiegsamen Linie AD niedergedrücket werden, eine solche Krümmung bekommen muß.

Erster Anhang.

Von geometrischen Instrumenten.

Vorerinnerung.

Da ich nun die ganze Geometrie theils in meinem selbstlernenden Geometer, theils in dieser höheren Meßkunst, abgehandelt habe, so will ich zum Besten der Anfänger noch eines und das andere beifügen, was zwar nicht ganz unentbehrlich, aber doch nüzlich ist. Zuerst folget hier eine kurze Beschreibung der nöthigsten Instrumente, deren man sich mit Vortheil bedienen kann, wenn man geometrische Figuren auf dem Papiere zu zeichnen hat. Was diejenigen Werkzeuge betrift, die zum Nivelliren und Landmessen gehören, so findet man die gebräuchlichsten im lezten Hauptstücke des selbstlernenden Geometers anzeiget.

---

§. 1.

Unter allen Instrumenten, deren man sich bedienet um geometrische Figuren auf dem Papiere zu zeichnen, ist das einfacheste das **Lineal**, welches so allgemein bekannt ist, daß es überflüßig wäre, eine Beschreibung davon zu machen. Die Richtigkeit eines Lineals wird dadurch probiret, daß man eine Linie mit demselben ziehet, und hernach das Lineal längst derselben hin und her schiebet: wenn es allemal genau daran schließet, so ist es richtig.

Man ziehet die Linien auf dem Papiere entweder mit einem Bleystifte, oder mit einer gewöhnlichen Schreibe-Feder, oder auch mit einer **Reißfeder** von Eisen oder Meßing, welche zwei Spitzen hat, die vermittelst einer Schraube, so viel als nöthig ist, zusammen getrieben werden.

§. 2.

Kreise werden mit dem **Zirkel** beschrieben. Dessen Güte bestehet darinn, daß die Schenkel sich recht spitz endigen, daß sie genau von gleicher Länge seyn, und daß sie sich weder zu drange noch zu leicht auf und zu machen lassen. Der Bequemlichkeit wegen ist es gut, daß man zwei Zirkel habe, einen **Handzirkel**, um blinde Kreise und Bogen damit zu beschreiben, und einen **Reiß-Zirkel**, woran sich eine Reißfeder oder ein Bleistift einschrauben läßt.

Einige Künstler, als zum Beispiele die Uhrmacher, bedienen sich eines **doppelten Zirkels**, wodurch man sogleich eine gerade Linie nach einem gewissen Verhältnisse verkleinern kann. Es seyen z. E. die Schenkel

(Siehe die folgende Figur.)

AD

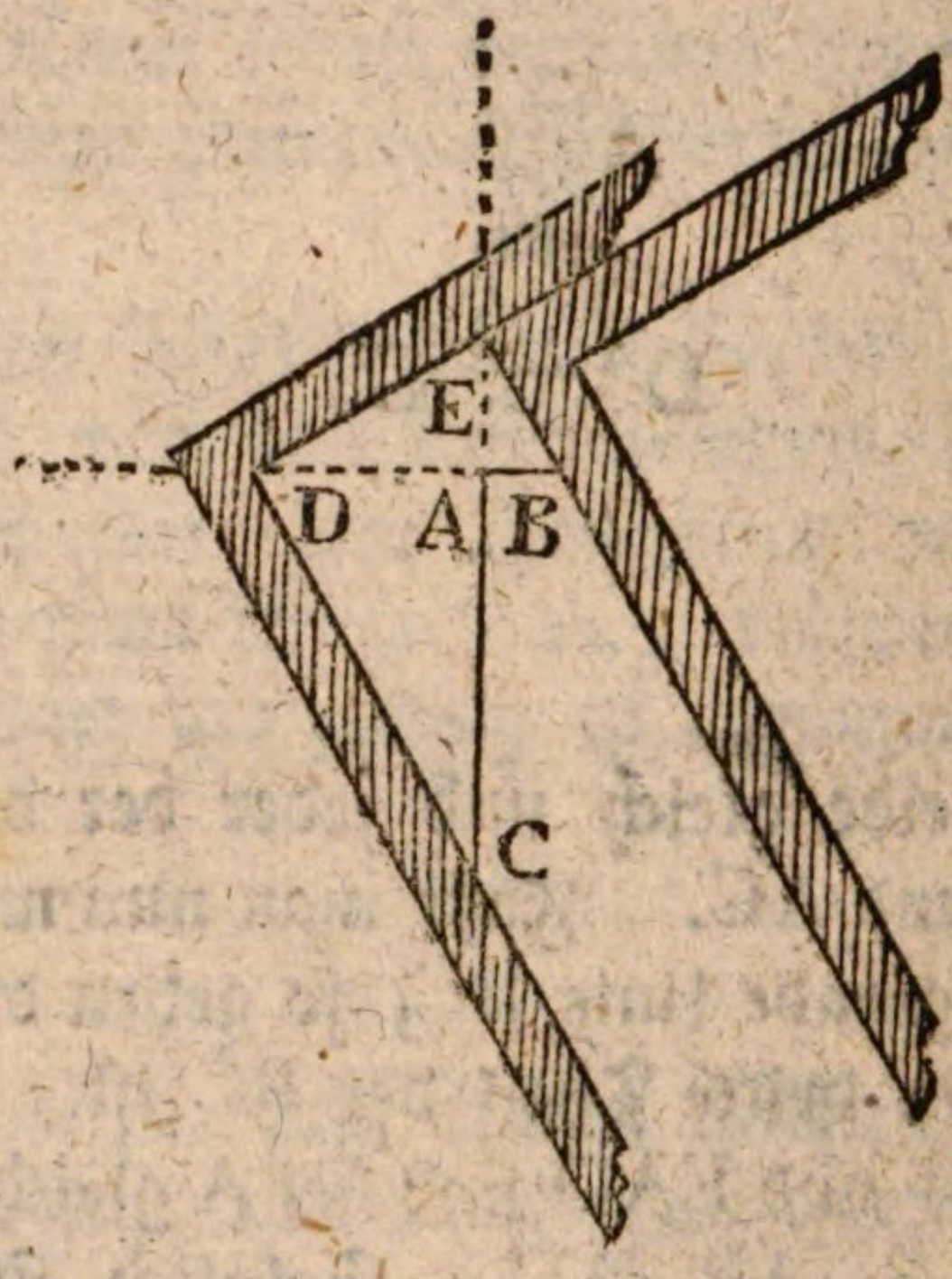
AD und AE beide gleich und jeder der dritte Theil der Schenkel AB und AC. Faßt man nun mit den größeren Schenkeln die gerade Linie BC, so geben die kleineren die DE, welche der dritte Theil der BC ist. Denn in den Dreiecken CAB und EAD sind bei A gleiche Winkel, und es ist AC, AE :: AB, AD. Folglich sind beide Dreiecke ähnlich. Demnach ist BC, DE :: AC, AE :: 3, 1.

§. 3.

Wenn senkrechte Linien gezogen werden sollen, so geschiehet dieses am bequemsten vermittelst des Winkelhakens, welches Instrument so bekannt ist, daß keine Beschreibung davon nöthig ist. Die Richtigkeit dieses Instruments wird dadurch bestätiget, daß man mit demselben eine Linie senkrecht auf einer anderen ohngefähr gegen die Mitte derselben ziehe, hernach aber das Instrument umkehre und es an der anderen Seite der Figur anlege, um zu sehen, ob es genau auf beiden Linien anschließet.

Bei Gelegenheit des Winkelhakens wollen wir, dem Anfänger zu gefallen, zeigen, auf welche Art Plato dieses so einfache Instrument zur Auflösung einer schweren Aufgabe gebrauchet hat.

Zwischen zwei Linien AB und AC sollen zwei mittlere Proporzional-Linien gefunden werden.



Man lege beide Linien auf einer Ebne an einander, so daß sie einen rechten Winkel BAC machen. Man verlängere beide über den Scheitel des Winkels. Man lege zwei Winkelhaken an einander, so daß ein Schenkel des einen längs dem einen Schenkel des andern gleiten könne. Man schiebe sie so lange hin und her, bis daß die beiden rechten Winkel der Winkelhaken genau auf die Verlängerungen der gegebenen Linien, und die Schenkel der Winkelhaken auf die Enden der gegebenen Linien fallen. So sind AE und AD die beiden mittleren Proporzional-Linien zwischen AB und AC.

Denn im rechtwinklichen Dreiecke BDE ist AE die mittlere Proporzional-Linie zwischen AB und AD. Ferner

ner im rechtwinklichen Dreiecke EDC ist AD die mittlere Proporzional-Linie zwischen AE und AC. Also ist ∴ AB, AE, AD, AC.

Ist AC doppelt so groß als AB, so ist AE die Flächenseite eines Würfels der doppelt so groß ist als der Würfel, welcher AB zur Flächenseite hat. Denn weil

$$AB, AE :: AE, AD$$

$$\text{so ist } AD = \frac{AE^2}{AB}$$

Ferner weil

$$AE, AD :: AD, AC$$

$$\text{oder } AE, \frac{AE^2}{AB} :: \frac{AE^2}{AB}, AC$$

$$\text{so ist } AC = \frac{AE^3}{AB^2}$$

und wenn $AC = 2\,AB$, so ist

$$2AB = \frac{AE^3}{AB^2},$$

$$\text{oder } 2AB^3 = AE^3$$

§. 4.

Zur Ausmessung der Linien bedienet man sich des Maaßstabes, welcher entweder ein natürlicher oder ein verjüngter ist. Ein natürlicher Maaßstab ist eine auf einem Körper gezeichnete gerade Linie, die in einem Lande als bekannt angenommen wird, und die in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile eingetheilet ist, welche ebenfalls, der Größe nach, als bekannt angenommen werden. So pfleget man zum Exempel Ketten oder Stricke oder Stangen zuzubereiten, die eine bestimmte Länge haben,

ben, welche man in Deutschland eine rheinländische Ruthe nennet. Solche Länge wird in zwölf Fuß, jeder Fuß in zwölf Zoll, jeder Zoll in zwölf kleinere Theile, die man Linien nennet, getheilet.

Es giebt in der Natur keine vollkommen bestimmte und unveränderliche Länge, die allen Völkern zum Maaße oder Maaßstabe dienen könnte. Daher kömmt es, daß bei verschiedenen Völkern der nemliche Name oft sehr verschiedene Längen anzeiget. Z. E. Der Französische Fuß ist länger als der Rheinländische, und dieser ist länger als der Englische.

Im gemeinen Leben wird das Längenmaaß meistens in 12 Theile, und jeder wiederum in 12 getheilet. Auch begnüget man sich oft mit der wiederholten Halbirung, als bei der Elle. Hingegen pflegen die praktischen Geometer die Eintheilung in 10 Theile oder die Dezimalbrüche allen anderen vorzuziehen. Sie schreiben zum Exempel

4; 7 8 3 5 Ruthen,

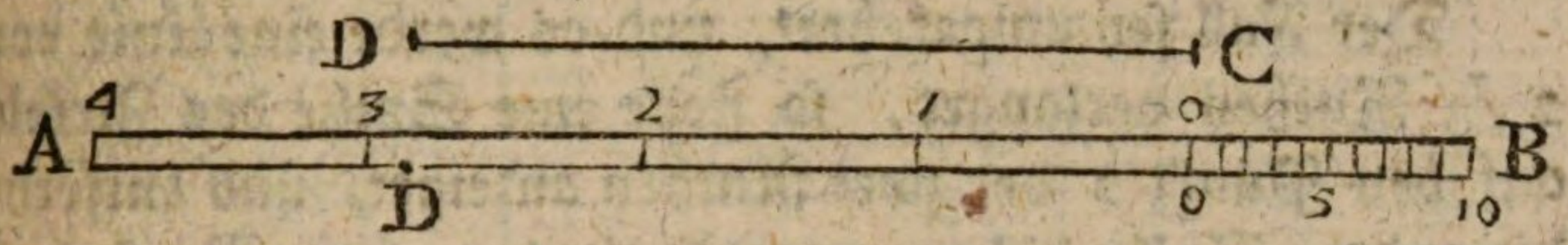
welches heißt $4 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{5}{10000}$ Ruthen, oder 4 ganze Ruthen $+ \frac{7}{10} +$ &c. Solche Dezimal-Brüche verkürzen merklich alle arithmetischen Operazionen.

§. 5.

Ein verjüngter Maaßstab ist derjenige, der denselben Namen und die selbigen Eintheilungen hat als der natürliche, aber kleiner ist, so daß die Figuren, die nach demselben gezeichnet sind, zwar denen ähnlich seyn können, die nach dem natürlichen ausgeführet sind, aber alle Dimensionen oder Ausmessungen derselben nach einem gewissen Verhältnisse verkleinert vorstellen.

Z. E.

Eine Landkarte stellet die Gestalt und die Ausmessungen eines Landes nach einem verjüngten Maaßstabe vor, so daß z. E. jede Meile auf dem Papiere 500000mal kleiner ist als auf der Erde. Der Riß eines Gebäudes stellet das Gebäude im Kleinen vor, so daß z. E. eine Ruthe auf dem verjüngten Maaßstabe 50mal kleiner ist als im Gebäude selbst.



Ein verjüngter Maaßstab kann folgendermaßen auf dem Papiere gezeichnet werden.

Ziehe eine gerade Linie AB, und theile sie in so viel gleiche Theile als sie Ruthen vorstellen soll, z. E. in 5 gleiche Theile. Merke die Theilungspunkte. Zu mehrerer Deutlichkeit ziehe noch eine Parallel-Linie neben bei, und merke die Abtheilungen mit senkrechten Strichen.

Die letzte Ruthe theile in 10 gleiche Theile, und merke die Theile wie vorher mit Punkten oder mit senkrechten Strichen.

Numerire die Ruthen von o nach A zu, mit 0, 1, 2, 3, 4, so daß die erste o B nicht mitgerechnet werde.

Numerire auch die Zehntheile von o nach B zu, oder merke wenigstens den fünften und den zehnten Theilungs-Punkt.

Soll nun eine gerade Linie CD gemessen werden, so fasse ihre Länge mit dem Zirkel, trage sie auf den Maaßstab von o nach A zu. Gesetzet, sie reichet von o bis D,

so

so siehest du, daß sie zwei ganze Ruthen und etwas darüber hält.

Trage sie nun vom Punkte 2 nach B zu. Gesetzet sie reichet vom Punkte 2 bis zur 7ten Abtheilung der Ruthe oB, so siehest du, daß die gegebene Linie $2\frac{7}{10}$ oder 2;7 Ruthen hält.

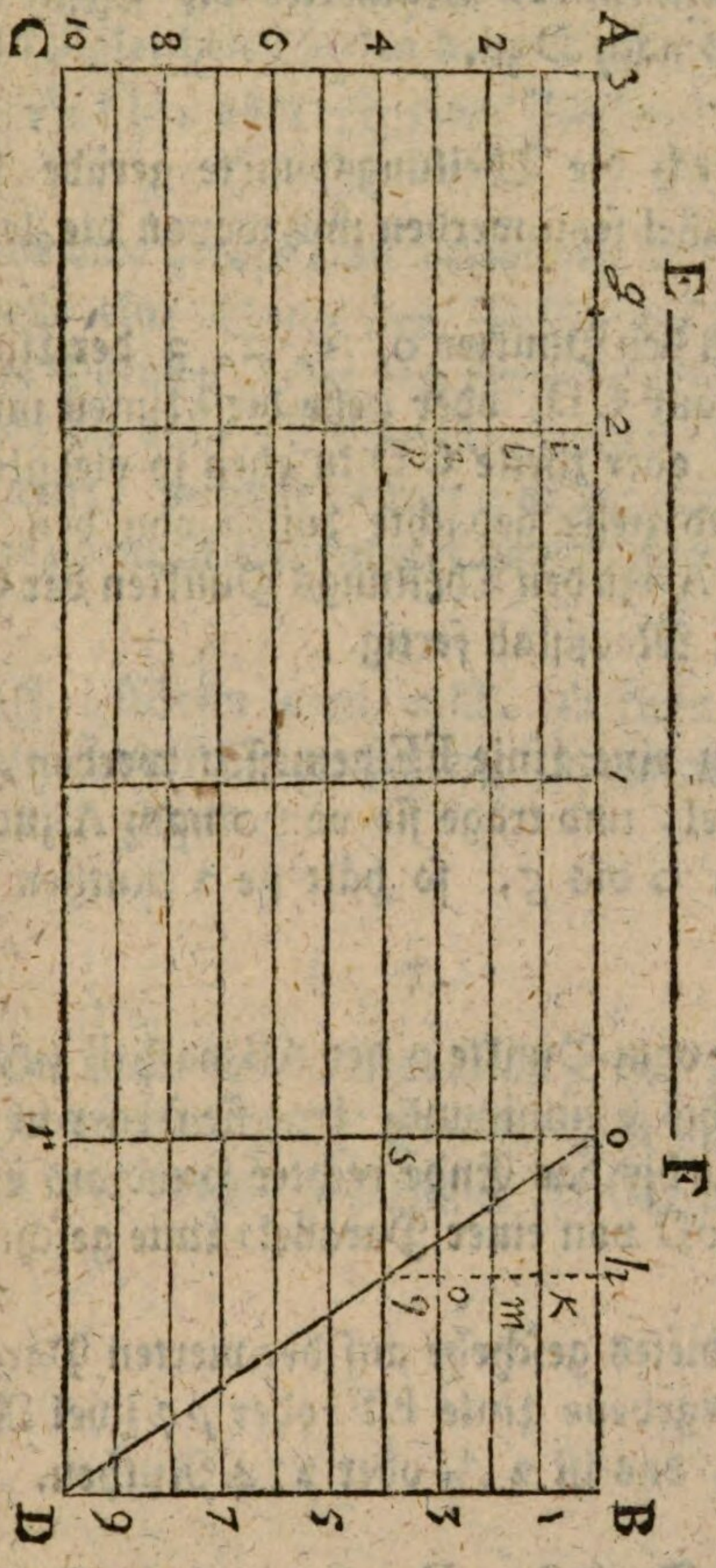
Der Fall sey umgekehret, und es werde eine Linie von $2\frac{7}{10}$ Ruthen verlanget, so stelle eine Spitze des Zirkels auf den Punkt 2 der zwei Ruthen anzeiget, und entferne die andere Spitze bis zur 7ten Abtheilung der oB, so hast du eine Länge von $2\frac{7}{10}$ Ruthen.

Anmerkung. Man siehet leicht ein, daß die Einheiten der AB auch Fuß oder Zolle vorstellen können, desgleichen, daß oB, wenn man will, in 12 Theile getheilet werden kann, welche dann Fuß oder Zolle andeuten, nachdem die Einheit eine Ruthe oder einen Fuß vorstellet. Eben so klar ist es, daß, wenn man den Einheiten ihre natürliche Größe giebt, so daß z. E. oB wirklich ein Zoll sey, der Maaßstab alsdann nicht mehr verjünget, sondern natürlich ist.

§. 6.

Auch kann ein Maaßstab also gemachet werden.

(Siehe die folgende Figur.)



Theile AB wie vorher in einige Einheiten ein, und numerire sie eben so mit 0, 1, 2, 3, &c.

Ziehe BD und AC senkrecht auf AB, und trage auf beiden zehn Theile, welche zwar alle gleich, aber von will-

kür-

kürlicher Größe sind. Numerire die Theile von A nach C und von B nach D zu.

Ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien, die mit AB parallel seyn werden und wovon die lezte CD ist.

Ziehe aus den Punkten o, 1, 2, 3 der Linie AB senkrechte Linien auf CD, oder ziehe diese Linien mit BD oder AG parallel, oder theile CD in eben so viel gleiche Theile als AB, und ziehe gedachte Linien von den Theilungs-Punkten der AB zu den Theilungs Punkten der CD. Ziehe oD, so ist der Maaßstab fertig.

Soll nun eine Linie EF gemessen werden, so fasse sie mit dem Zirkel, und trage sie von o nach A zu. Gesetzet sie gehe von o bis *g*, so hält sie 2 Ruthen und etwas darüber.

Trage sie vom Punkte 2 der AB nach B zu, wo sie die Länge von 2 bis *h* einnimmt. Lege sie ferner in *ik*, in *lm*, in *no*, in *pq*, bis das Ende rechter Hand auf einen Punkt trift, wo die oD von einer Parallel-Linie geschnitten wird.

Gesetzet dieses geschehe auf der vierten Parallel-Linie, so hält die gegebene Linie EF oder *pq* zwei Ruthen und 4 Zehntheile, das ist $2\frac{4}{10}$ oder 2; 4 Ruthen.

Denn die Dreiecke *or*D und *osq* haben beide den Winkel o gemein, die Winkel in *q* und in D sind gleich, weil sie homolog sind. Also ist

$$\triangle\ or\,D \overline{\sim} \triangle\ osq$$

daher ist $or : os :: rD : sq$

oder $10 : 4 :: rD : sq$

Da

Da sich nun r D zu $s\,q$ verhält wie 10 zu 4, so enthält $s\,q$ vier von 10 gleichen Theilen der r D oder der o B. Das heißt $s\,q = \frac{4}{10}\,r$ D, oder $\frac{4}{10}$ einer Ruthe.

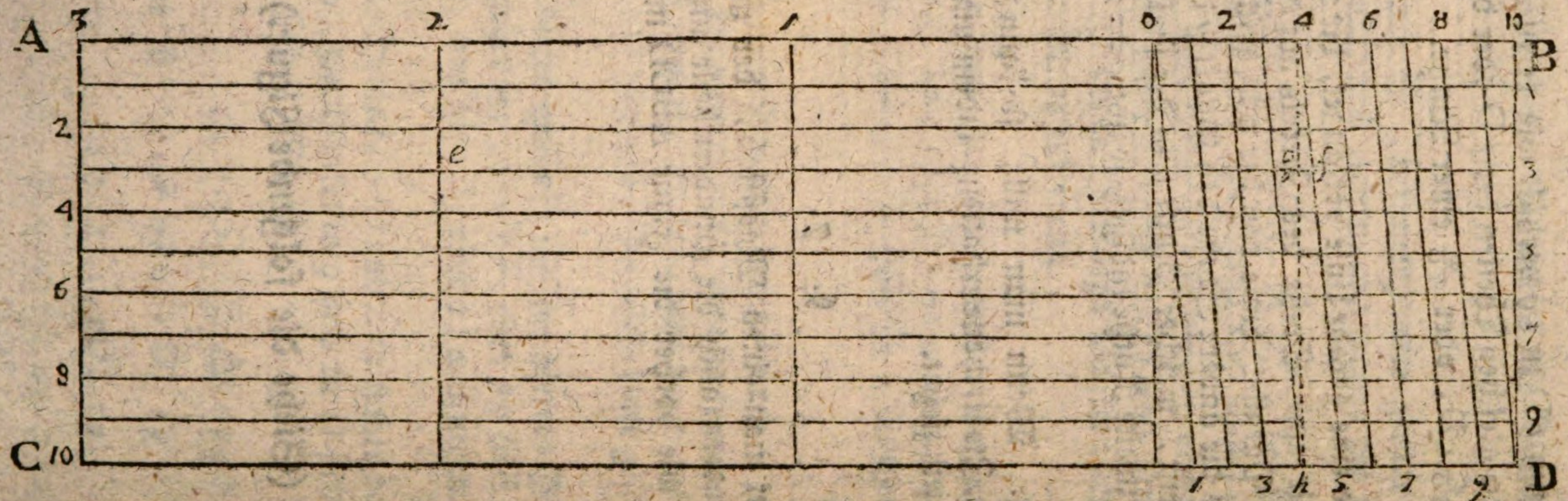
Es werde eine gerade Linie verlanget, die $2\frac{4}{10}$ Ruthen halte. Stelle eine Spitze des Zirkels auf den Punkt q, wo die vierte Parallel Linie von der o D geschnitten wird. Oefne ihn bis die andere Spitze den Punkt p derselben Parallel-Linie trift, welcher Punkt p in der senkrechten Linie ist, welche die zweite Ruthe endiget, so ist $p\,q = 2\frac{4}{10}$ Ruthen.

Anmerkung. Wenn man will, so kann man anstatt Zehntheile, Zwölftheile erhalten, indem man zwölf Parallel-Linien ziehet.

§. 7.

Verlanget man einen Maaßstab, der nicht nur die Zehntheile sondern auch die Hunderttheile anzeige, so beschreibe man wie vorher die Figur ABCD mit ihren Pa-

(Siehe die folgende Figur.)


A
B
C
D
3
2
1
0
2
4
6
8
10
2
4
6
8
10
e
f
g
h
1
3
5
7
9
1
3
5
7
9

tallel-Linien und senkrechten Linien, auch mit den Nummern derselben. Man ziehe aber nicht oD wie vorher, sondern theile oB und 1D jede in zehn gleiche Theile, und numerire die Theile von o nach B und von 1 nach D zu.

Man ziehe schräge Linien vom ersten Theilungspunkte zum zweiten, vom zweiten zum dritten, u. s. f. wie sie die Figur vorstellet. So ist der Maaßstab fertig.

Um nun eine Linie zu messen, lege man sie wie vorher an, so daß das eine Ende auf eine der senkrechten Linie und das andere auf der nemlichen Parallel-Linie an einem Orte falle, wo sie von einer schrägen geschnitten wird. Es falle z. E. das eine Ende in *e* das andere in *f*, so zeiget die Zahl 2 über *e*, zwei Ruthen; die Zahl 4 über *f* zeiget 4 Zehntheile, die Zahl 3 womit die Parallel-Linie *ef* am Ende numeriret ist, zeiget 3 Hundertttheile an.

Zum Beweise ziehe die Linie 4... *h* vom vierten Theilungs-Punkte oben, zum vierten Theilungs-Punkte unten, so machet *eg*, 2 Ruthen und $\frac{4}{10}$. Nun sind, wie im vorigen Paragraph die Dreiecke 4*hs* und 4*gf* ähnlich, also ist

ah, *ag* :: *hs*, *gf*

oder 10, 3 :: *hs*, *gf*

Weil nun *hs* zu *gf* sich verhält wie 10 zu 3, so enthält *gf* dreimal den zehnten Theil von *hs*. Es ist aber *hs* der zehnte Theil einer Ruthe, also enthält *gf* dreimal den Hunderten Theil einer Ruthe.

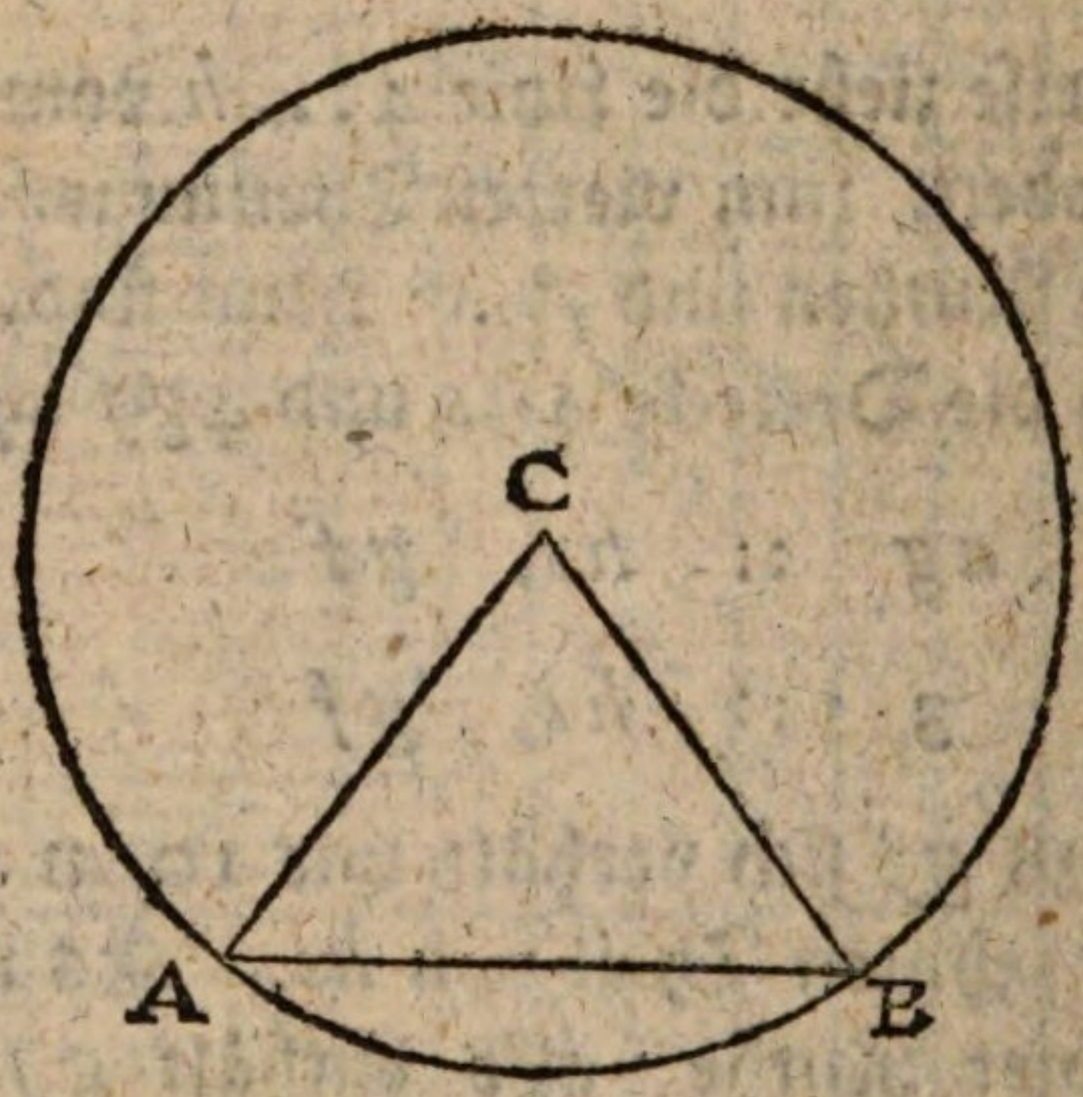
Gesetzet nun der Fall sey umgekehret, und es werde eine Linie verlanget die $2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ Ruthen halte; so setze eine Spitze des Zirkels auf dem Punkte *f*, wo die dritte Parallel-Linie von der vierten schrägen Linie geschnitten wird. Oefne den Zirkel bis die andere Spitze in *e*,

auf den Punkt fällt, wo die nemliche Parallel-Linie von der senkrechten geschnitten wird, welche 2 Ruthen andeutet, so ist *f e* die verlangte Linie.

§. 8.

Zur Ausmessung der Winkel gebrauchet man den Winkelmesser (Transporteur) der schon aus der gemeinen Geometrie bekannt ist. Auch wird in derselben gezeiget, wie man mit Hülfe dieses Instruments einen Winkel messen, und einen Winkel von gewissen Graden stellen kann. Hier wollen wir nur noch zeigen, wie es zur Beschreibung der regulären Vielecke gebrauchet werden kann.

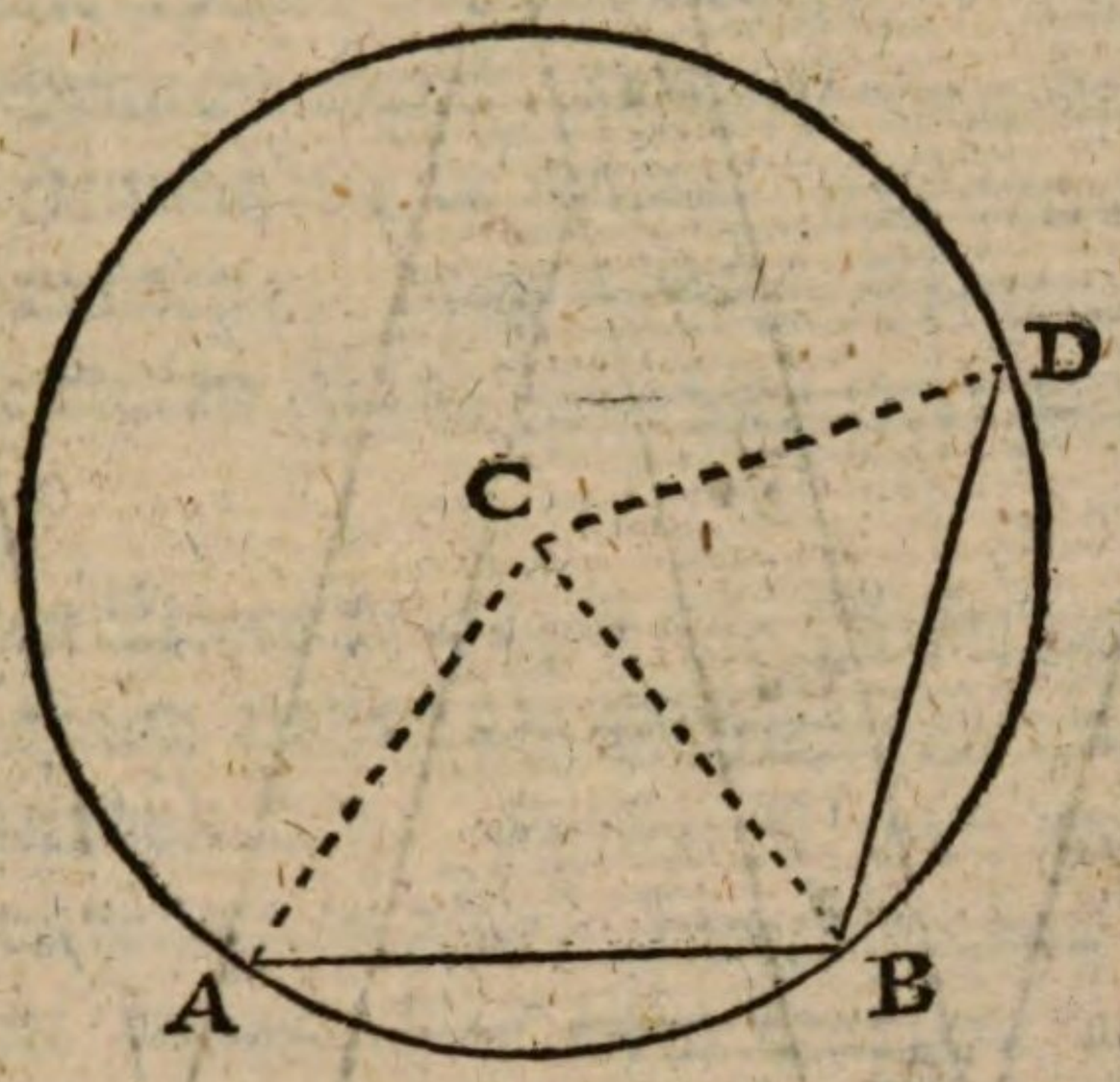
I) Gesetzet, es soll im Zirkel, dessen Mittelpunkt C ist, ein reguläres Fünfeck eingeschrieben werden. Divi-



dire 360 Grad durch 5, als die Anzahl der Seiten, so bekömmst du den Winkel C am Mittelpunkte, nemlich $\frac{360}{5}^{\circ} = 72^{g}$. Ziehe willkürlich den Halbmesser AC, und stelle über AC in C den Winkel ACB $= 72^{g}$. Ziehe AB, so ist diese die Seite des Fünfeckes, welche dann am Umkreise herumgetragen wird.

II)

II) Es sey eine beliebige Grundlinie AB gegeben, worüber ein gewisses reguläres Vieleck beschrieben werden soll, z. E. ein Fünfeck.



Dividire 360 Grad durch die Anzahl der Seiten, nemlich durch 5, so kömmt der Winkel ACB. Subtrahire diesen Winkel von 180°, so kömmt ∠CAB + ∠CBA, oder ∠CBA + ∠CBD, oder ∠ABD, nemlich $180^g - 72^g = 108^g$. Stelle demnach über AB in B den Winkel ABD $= 108^g$. Mache BD = AB. Durch die Punkte A, B und C ziehe den Umkreis eines Zirkels dessen Mittelpunkt C seyn wird. Dieses ist der umgeschriebene Zirkel, in dessen Umkreise die Seite AB oder DB nun weiter eingetragen wird.

§. 9.

Wenn etwas große Figuren verkleinert werden sollen, so bedienet man sich des Storchschnabels oder Pantographs, welcher hier deutlich abgezeichnet ist. Man wird die Einrichtung dieses Instruments am besten begreifen, wenn man sich zwei Zirkel mit platten Schenkeln vorstellet, die kreuzweise übereinander geleget sind. Die übereinander gelegten Schenkel sind mit Schrauben verbunden, welche aber der Bewegung nicht hindern. Alle vier

vier

vier Schenkel haben einige Löcher, vermöge welcher man die Schenkel an verschiedenen Stellen an einander schrauben kann. Die Löcher sind numeriret. Wenn man das Instrument gebrauchen will, so muß man die Schrauben mit Hülfe der Nummern so stellen, daß inwendig ein Parallelogramm entstehe, oder daß die Gegenseiten der inwendigen viereckigten Figur zwei und zwei gleich seyn.

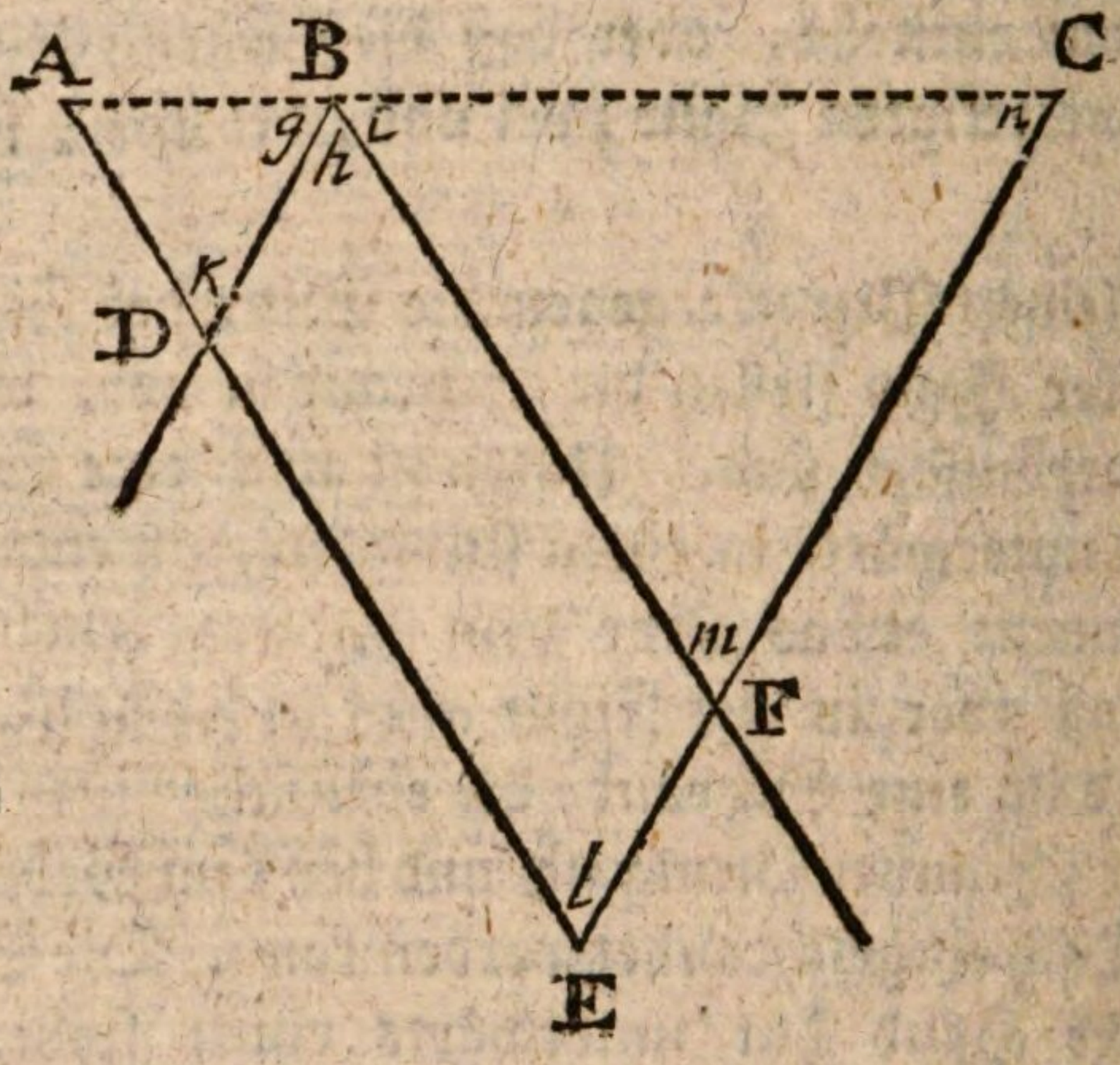
Die kleinen Vierecke gegen die Mitte der Figur rechter und linker Hand stellen die Schrauben vor, womit die Schenkel verbunden sind. Unten ist noch eine Schraube, welche sich unterwärts in einen stumpfen Fuß endiget, der das Instrument etwas über dem Papiere erhoben hält, welcher Fuß aber in der Figur nicht zu sehen ist. Oben linker Hand ist eine Schraube die ebenfalls einen Fuß bildet, welcher schraubenförmig ist, und bey dem Gebrauche in den Reiß-Tisch eingeschraubet werden kann. Die Schraube oben rechter Hand hat unterwärts einen spitzigen Fuß, womit man den Zügen einer gegebenen Figur folgen kann. Oberwärts gegen die Mitte der Figur ist ein Scharnier mit einem runden Loche worinn ein Bleystift befestiget wird.

Soll nun vermöge dieses Instruments eine Figur z. E. ein Schattenriß verkleinert werden, so wird die Schraube oben linker Hand in dem Tische eingeschraubet. Die Spitze oben rechter Hand wird auf den Zügen der gegebenen Figur herum geführet. Alsdann beschreibet das Bleistift (oben gegen die Mitte) die gegebene Figur im kleinen.

§. 10.

Obgleich der Gebrauch dieses Instruments nicht die geringste Schwierigkeit ha, so fällt doch der Beweis den Anfängern etwas schweer. Wir müssen vor allen Din-

gen beweisen, daß die drei obersten Punkte, nemlich die am Tische befestigte Schraube, das Bleistift, und die Spitze die auf der gegebenen Figur herum geführet wird, allemal in einer geraden Linie liegen.



Gegenwärtige Figur soll den Storchschnabel vorstellen, wenn er gehörig gerichtet ist, nemlich so, daß ED = BF und DB = EF Vermöge der Einrichtung des Instruments ist allemal DB = DA und BF = FC. Ziehe die Linien AB und BC.

Die Dreiecke ADB und BFC sind ähnlich. Denn es ist $\angle k = \angle m$, weil sie beide dem homologen Winkel l gleich sind. Ferner da AD = DB und BF = FC, so ist AD, BF :: DB, FC. Folglich

$$\triangle ADB \sim \triangle BFC.$$

Also ist $\angle g = \angle n$. Es ist auch $\angle h = \angle m$, als Wechselwinkel. Folglich ist

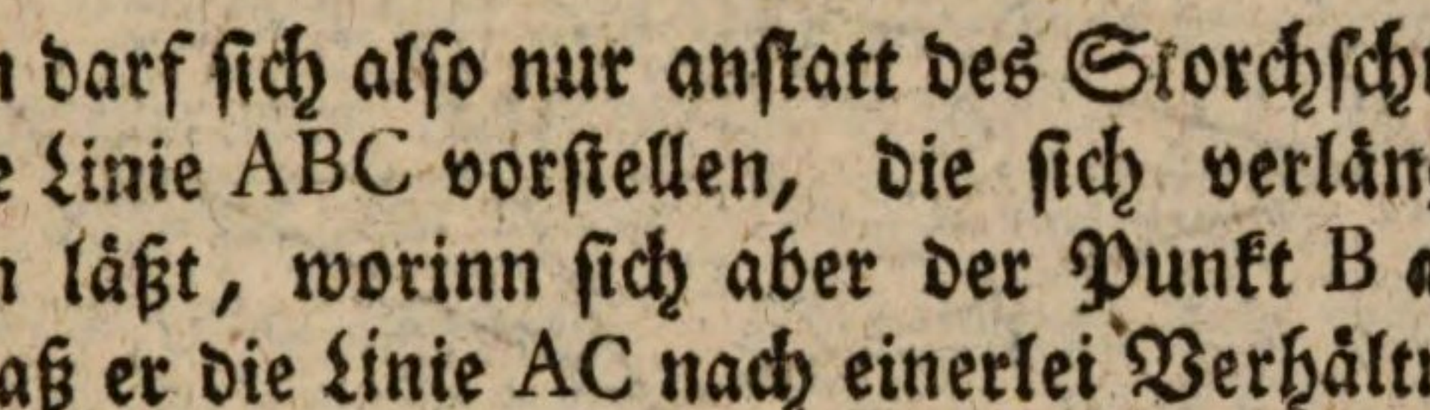
$$\angle g + \angle h + \angle i = \angle n + \angle m + \angle i = 180^{\circ}$$

Da

Da nun die Winkel *g*, *h* und *i* so viel machen als zwei rechte, so ist ABC eine gerade Linie.

Diese gerade Linie ABC ist in B allemal nach einerley Verhältniß getheilet, nemlich so daß AB, AC :: AD, AE. Denn da im Dreiecke AEC, die DB mit EC parallel ist, so ist in der That jedesmal AB, AC :: AD, AE. Und da AD und AE unveränderte Größen sind, so lange nemlich die Schrauben an ihren Stellen bleiben, so ist das Verhältniß von AB zu AC auch beständig einerlei, man mag den Punkt C in Betrachtung des unbewegten Punktes A weiter oder näher rücken.

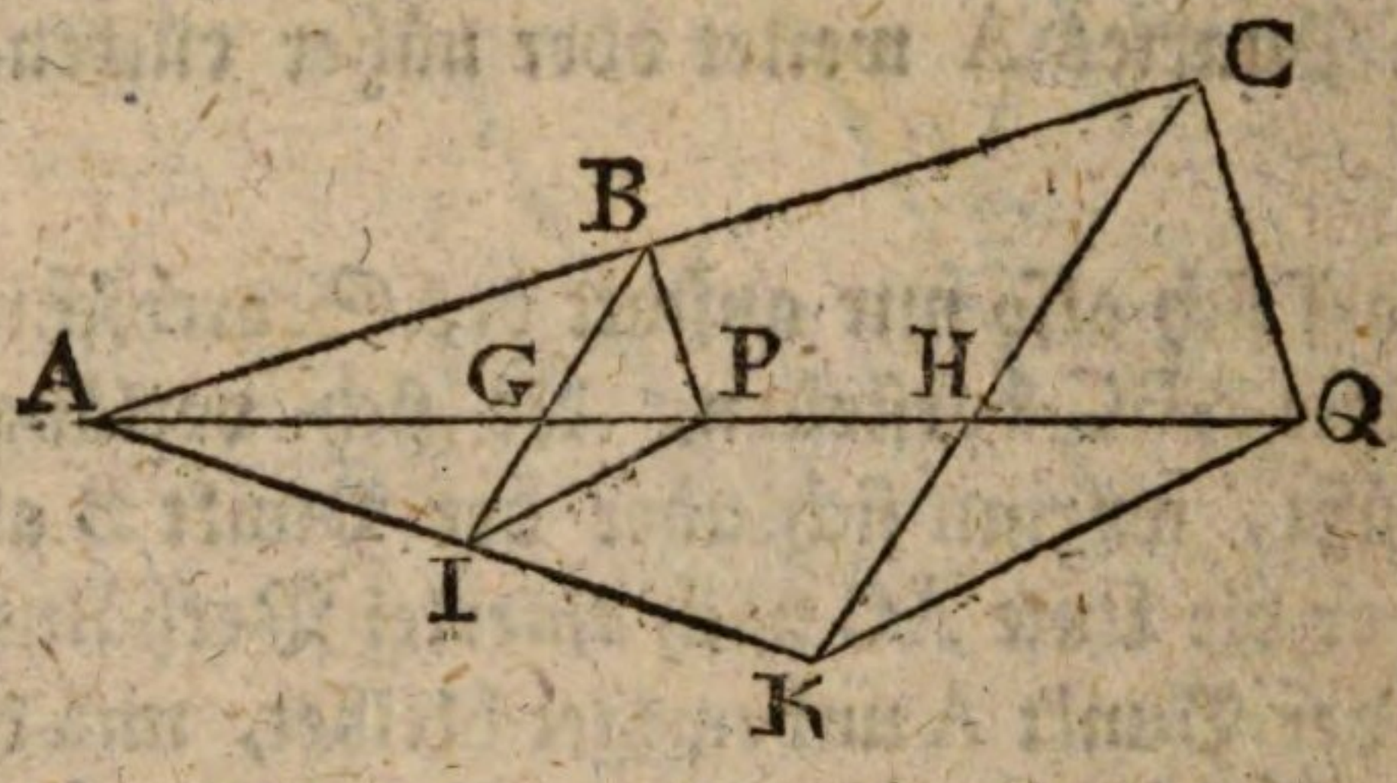
Man darf sich also nur anstatt des Storchschnabels eine gerade Linie ABC vorstellen, die sich verlängern uud verkürzen läßt, worinn sich aber der Punkt B allemal so stellet, daß er die Linie AC nach einerlei Verhältniß theile. Wenn nun der Punkt A unbeweget bleibet, und der Punkt C eine gerade Linie beschreibet, so beschreibet auch der Punkt B eine gerade Linie.



Es beschreibe der Punkt C die gerade Linie CK, so wollen wir in derselben die drei Punkte C, H, K annehmen. Wenn der Punkt C in C ist, so sey der Punkt B in B; wenn der Punkt C in H ist, so sey der Punkt B in G; und wenn der Punkt C in K ist, so sey der Punkt B in I. Ziehe die geraden Linien BG und GI.

So ist △BAG ∽ △CAH, weil ∠A gemein ist, und weil AC, AB :: AH, AG. Folglich ist ∠l = ∠n, Eben so wird bewiesen, daß △GAI ∽ △HAK, und ∠m = ∠o. Da nun ∠l + ∠m = 2R, so ist ∠n + ∠o = 2R. Folglich liegen GB und GI in einer geraden Linie.

Nimmt man anstatt H einen anderen Punkt zwischen C und K, so fällt der Punkt G an einer anderen Stelle zwischen B und I. Es kann aber allemal bewiesen werden, daß er mit B und I in einer geraden Linie lieget. Also ist BGI eine gerade Linie.



Das bewegliche Ende C beschreibe ein Dreieck CKQ, so beschreibet der Punkt B ein ähnliches Dreieck BIP. Denn es ist △CAK ∽ △BAI, aus vorigen Gründen, also ist

CK, BI :: CA BA

Eben so ist CAQ ∽ △BAP, folglich

CQ, BP :: CA, BA

Auch ist △QAK ∽ △PAI, folglich

QK, PI :: KA, IA :: CA, BA

Da nun CK, BI
CQ, BP } :: CA, BA
QK, PI

so ist △CKQ ∽ △BIP

Ueberhaupt die geraden Linien, die der Punkt C beschreibet, stehen mit denen, die der Punkt B beschreibet, allemal in einerlei Verhältniß, und bilden einerlei Winkel. Beschreibet also der Punkt C eine reguläre oder irreguläre geradlinichte Figur, so beschreibet der Punkt B eine ähnliche Figur. Und da krummlinichte Figuren die Gränzen der geradlinichten sind, so findet die Aehnlichkeit auch bei krummlinichten Figuren statt, welches zu beweisen wir uns vorgenommen hatten.

§. 11.

Eines der nützlichsten Instrumente ist der Proporzional-Zirkel, welchen die Engländer einen Sektor nennen. Er bestehet aus zwei gleichen Linealen von Messing, welche wie ein gemeiner Zirkel zusammen gefüget sind, so daß sie um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt gedrehet werden können. Die Länge der Schenkel beträgt meistens einen halben Fuß. Auf jeder Seite des Instruments sind verschiedene gerade Linien gezeichnet, die alle nach dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte laufen. Die nemliche Linie, die auf einem Schenkel anzutreffen ist, findet sich allemal auch auf dem anderen gegen über, auf der

(Siehe die folgende Figur.)

Les Parties egales.
Les Parties egales.
Calibre des Pieces
Les Plans
Les Poligones
Les Poligones
Les Plans
nems

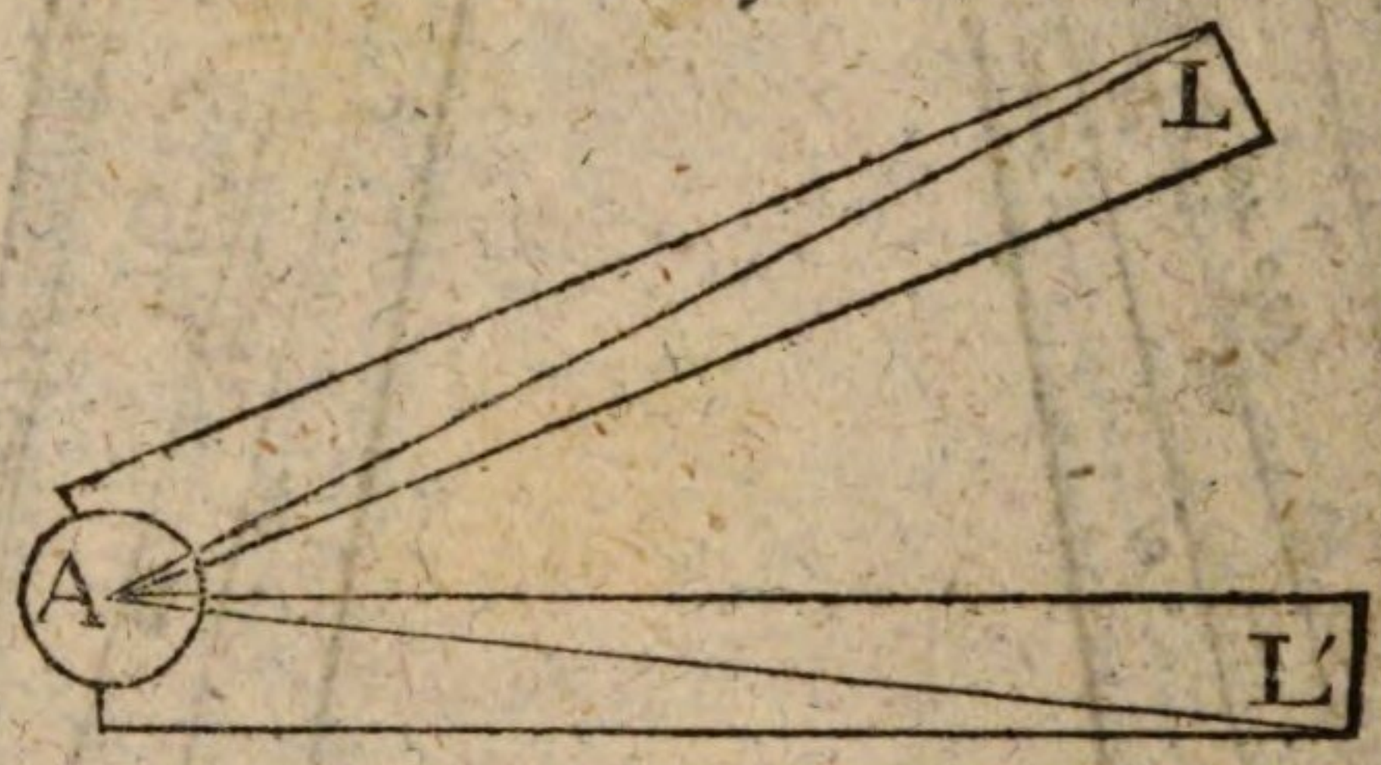
N. fec.
Les Calibres des boulets
Les Cubes
Les Solides
Les Cercles
Les Cercles
Metaux
Berol.

nem:

nemlichen Seite des Instruments. Beide Seiten sind hier aufs deutlichste abgebildet. Wir wollen nun jede Linie insbesondere vornehmen und deren Gebrauch betrachten. Denn der Proporzional-Zirkel ist nicht sowohl ein einziges Instrument als eine Zusammensetzung verschiedener Instrumente, die alle ihren besonderen Nutzen haben.

§. 12.

Die erste Linie, die wir auf dem Proporzional-Zirkel zu betrachten haben, ist die gleichtheilige oder arithmetische Linie (la ligne des parties égales), welche man in der großen Figur mit französischer Schrift angezeiget findet, und welche wir hier im Kleinen durch die Linie AL, AL′ vorstellen wollen.

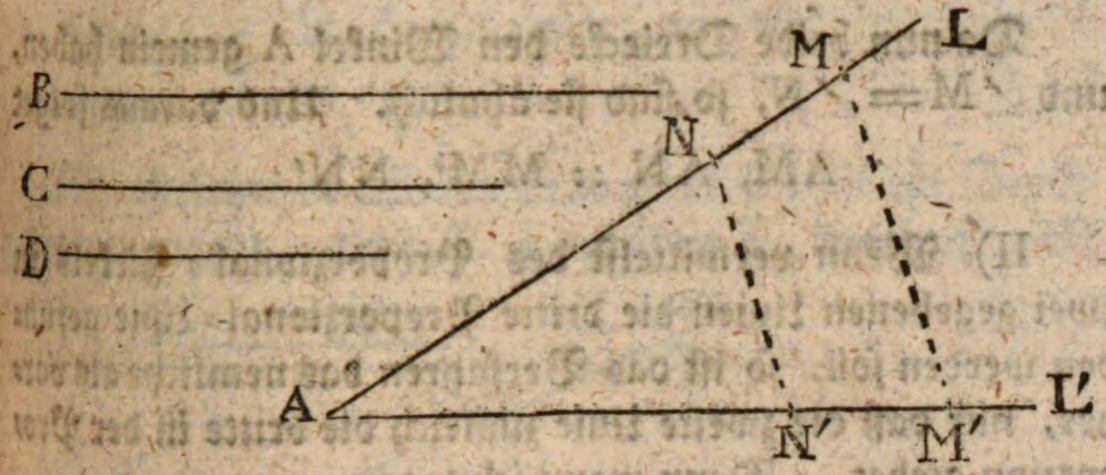


Sie ist in so viel gleiche Theile eingetheilet, als es die Länge des Instrumentes zuläßt, z. E. in 200 Theile, welche auf beiden Schenkeln vom Mittelpunkte an, von 10 zu 10, numeriret sind. Deren Gebrauch ist nun folgender.

I) Gesetzet, es soll vermittelst des Proporzional-Zirkels zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proporzional-Linie gefunden werden.

Stelle dir vor, AL und AL′ sey auf dem Proporzional-Zirkel die gleichtheilige Linie. Die drei gegebenen Linien mögen seyn B, C und D.

Tra-



Trage mit dem Zirkel die B auf AL und AL' in AM und AM' und anstatt der Punkte M und M' nimm den nächsten Theilungs-Punkt, weil es hierbei auf unbeträchtliche Kleinigkeiten nicht ankömmt.

Fasse mit dem Zirkel die Länge der C, und öfne das Instrument, bis beide Spitzen des Zirkels auf die Punkte M und M' zu stehen kommen.

Trage die D auf AN und AN' und merke den nächsten Theilungspunkt bei N oder N'.

Fasse mit dem Zirkel die Länge von N zu N' so ist diese die verlangte vierte Proporzional-Linie.

Dieses läßt sich also beweisen. Im Dreiecke MAM' sind $\angle A + \angle M + \angle M' = 2\,R$. Im Dreieck NAN' sind ebenfalls $\angle A + \angle N + \angle N' = 2\,R$.

Also ist $\angle A + \angle M + \angle M' = \angle A + \angle N + \angle N'$

daher $\angle M + \angle M' = \angle N + \angle N'$

Weil nun $AM = AM'$ und $AN = AN'$

so ist $\angle M = \angle M'$ und $\angle N = \angle N'$

Setze in die letzte Gleichung M anstatt M' und N anstatt N'

so ist $2 \angle M = 2 \angle N$

daher $\angle M = \angle N$

Da nun beide Dreiecke den Winkel A gemein haben, und ∠M = ∠N, so sind sie ähnlich. Und daraus folget

AM, AN :: MM′, NN′

II) Wenn vermittelst des Proporzional-Zirkels zu zwei gegebenen Linien die dritte Proporzional-Linie gefunden werden soll, so ist das Verfahren das nemliche als vorher, nur daß die zweite Linie zugleich die dritte in der Proporzion giebet. Denn wenn ich sage

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot}$ A, B, x

so heißt dieses eben so viel, als

A, B :: B, x

III) Geseßet man soll vermittelst des Proporzional-Zirkels ein Vieltheil einer gegebenen Linie D finden, z.E. den siebenten Theil, so heißt dieses eigentlich, wenn x der verlangte Theil ist,

7, 1 :: D, x

Nimm zwei Zahlen die sich verhalten wie 7 zu 1, z.E. 70 und 10, suche auf beiden Linealen diese Zahlen, und

merke die Punkte wo sie stehen. Fasse die gegebene D mit dem Zirkel, und öffne den Proporzional-Zirkel bis beide Spißen auf die Zahl 70 fallen.

Dann fasse mit dem Zirkel die beiden Punkte die mit 10 bezeichnet sind, so hast du den 7ten Theil der Linie D.

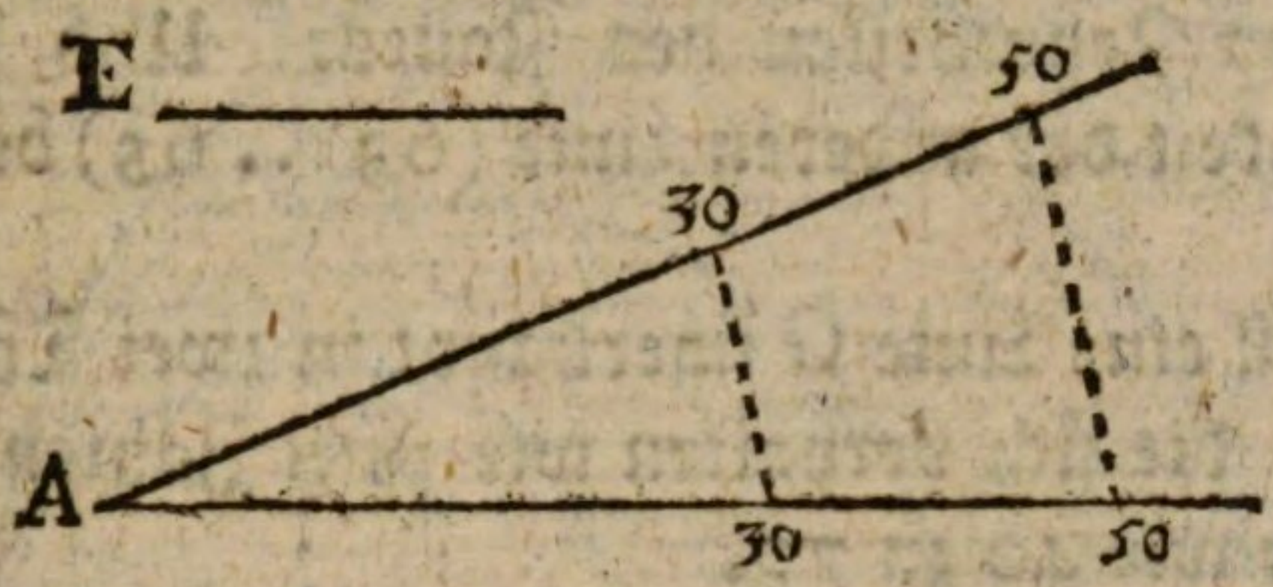
Denn es ist, wie vorher,

(70.. 70), (10.. 10) :: (A.. 70), (A.. 10)

oder

oder D, (10..10) :: 70, 10
oder D, (10..10) :: 7, 1

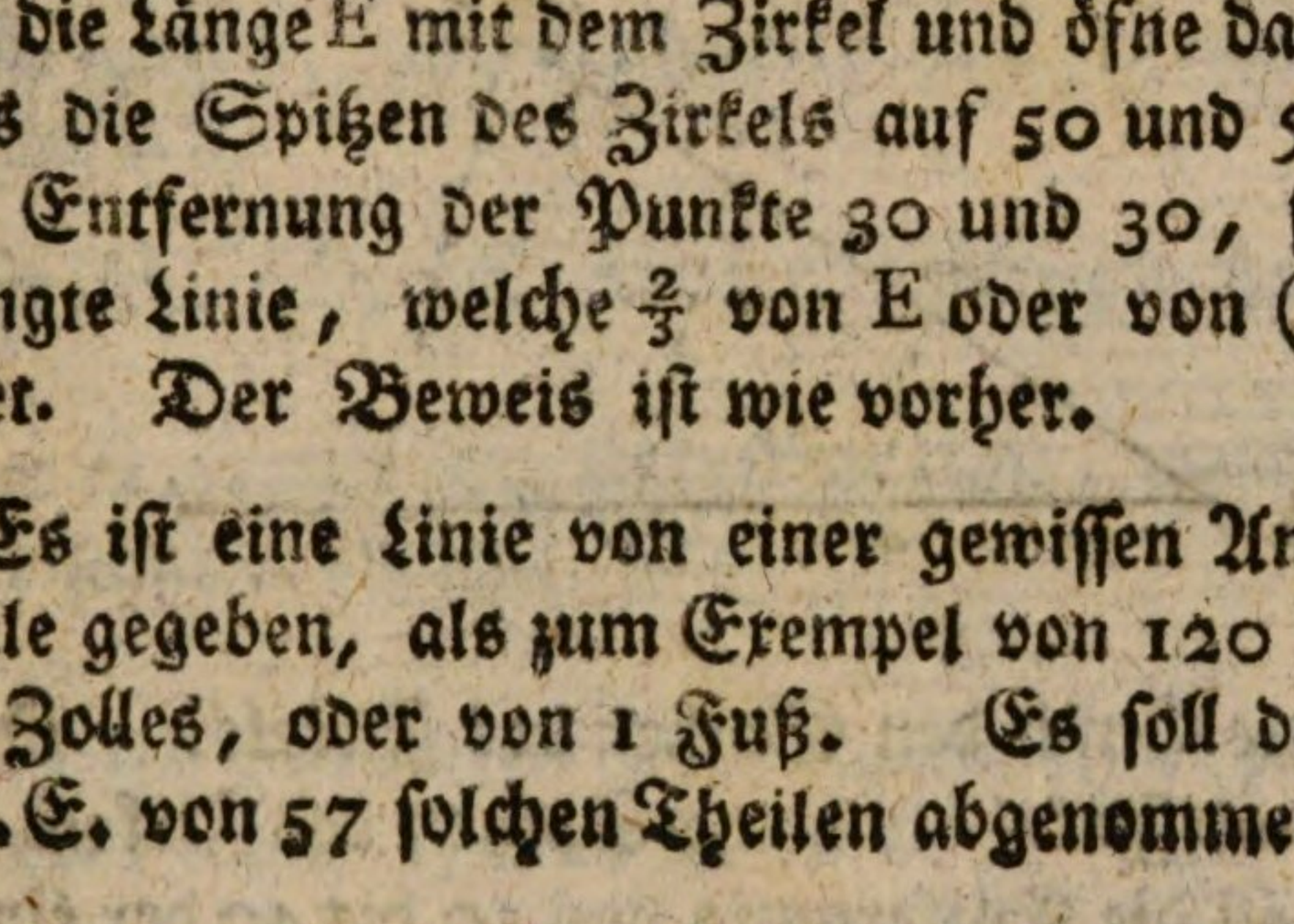
IV) Gesetzet es soll von einer geraden Linie ein Bruch gefunden werden, als z. E. $\frac{3}{5}$ der Linie E, das heißt, die



gegebene Linie soll sich zum verlangten Theile verhalten, wie 5 zu 3. Nimm nun zwei Zahlen, die sich verhalten, wie 5 zu 3, z. E. 50 und 30.

Fasse die Länge E mit dem Zirkel und öfne das Instrument, bis die Spitzen des Zirkels auf 50 und 50 fallen. Fasse die Entfernung der Punkte 30 und 30, so hast du die verlangte Linie, welche $\frac{2}{3}$ von E oder von (50..50) ausmachet. Der Beweis ist wie vorher.

V) Es ist eine Linie von einer gewissen Anzahl gleicher Theile gegeben, als zum Exempel von 120 Zehntheilen eines Zolles, oder von 1 Fuß. Es soll davon eine kleinere z. E. von 57 solchen Theilen abgenommen werden.



Fasse die F wie vorher mit den Spitzen des Zirkels, und öfne das Instrument bis beide Spitzen auf 120 fallen. So ist (57 . . . 57) der abzunehmende Theil.

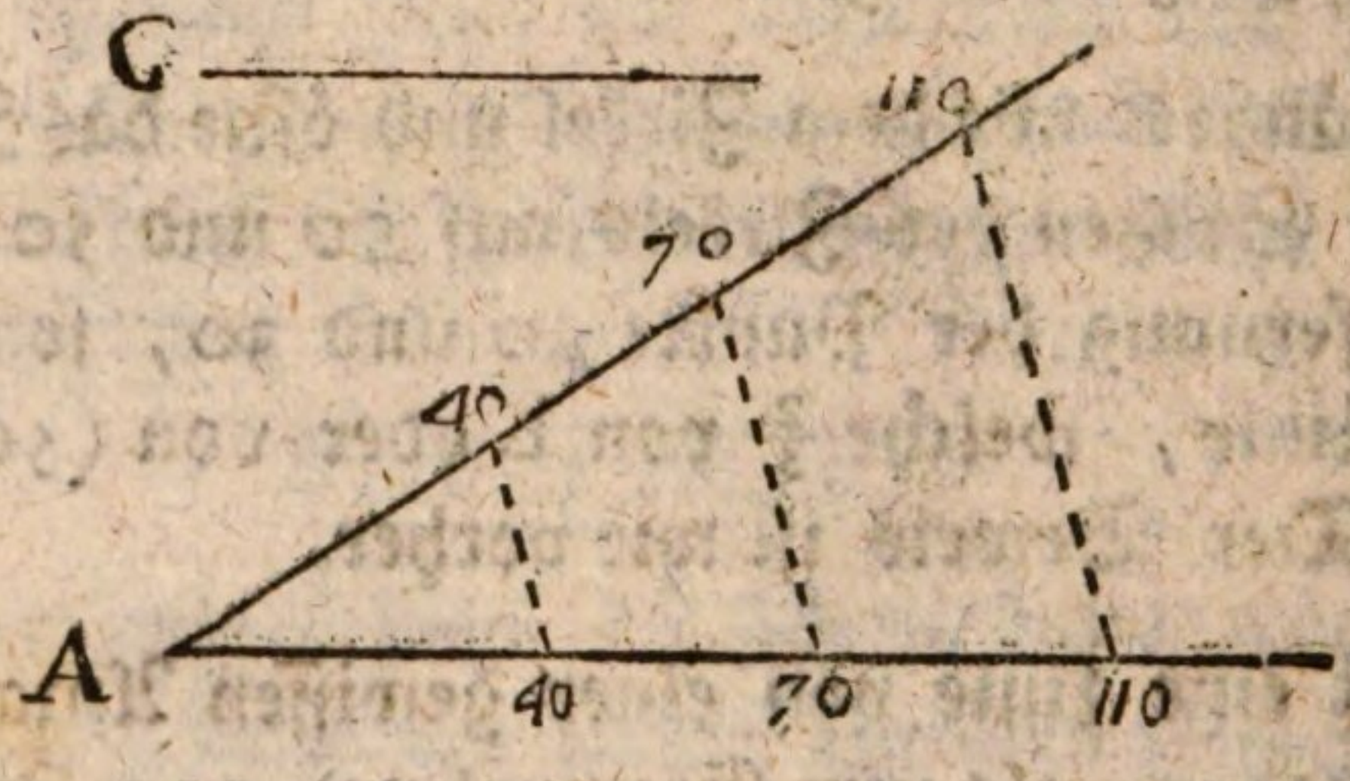
Oder

Oder subtrahire 57 von 120, so bleibet 63, und von 63 zu 63 ist die übrig bleibende Linie.

Denn es verhält sich (A... 120) zu (A.. 57) wie (120.. 120) zu (57 ... 57) oder wie 120 Zehntheile des Zolles zu 57 Zehntheilen des Zolles. Und so wird aus die Richtigkeit der anderen Linie (63 ... 63) bewiesen.

VI) Es soll eine Linie G überhaupt in zwei Theile getheilet werden, die sich verhalten wie zwei Zahlen, z. E. wie 4 zu 7 oder wie 40 zu 70.

Addire beide Zahlen, so kömmt 110



Fasse die G mit den Spitzen des Zirkels. Oefne den Proporzional-Zirkel bis beide Spitzen des Zirkels auf 110 fallen. So ist die Entfernung von 40 bis 40 der eine Theil, und von 70 bis 70 der andere Theil der gegebenen G.

Denn es verhält sich

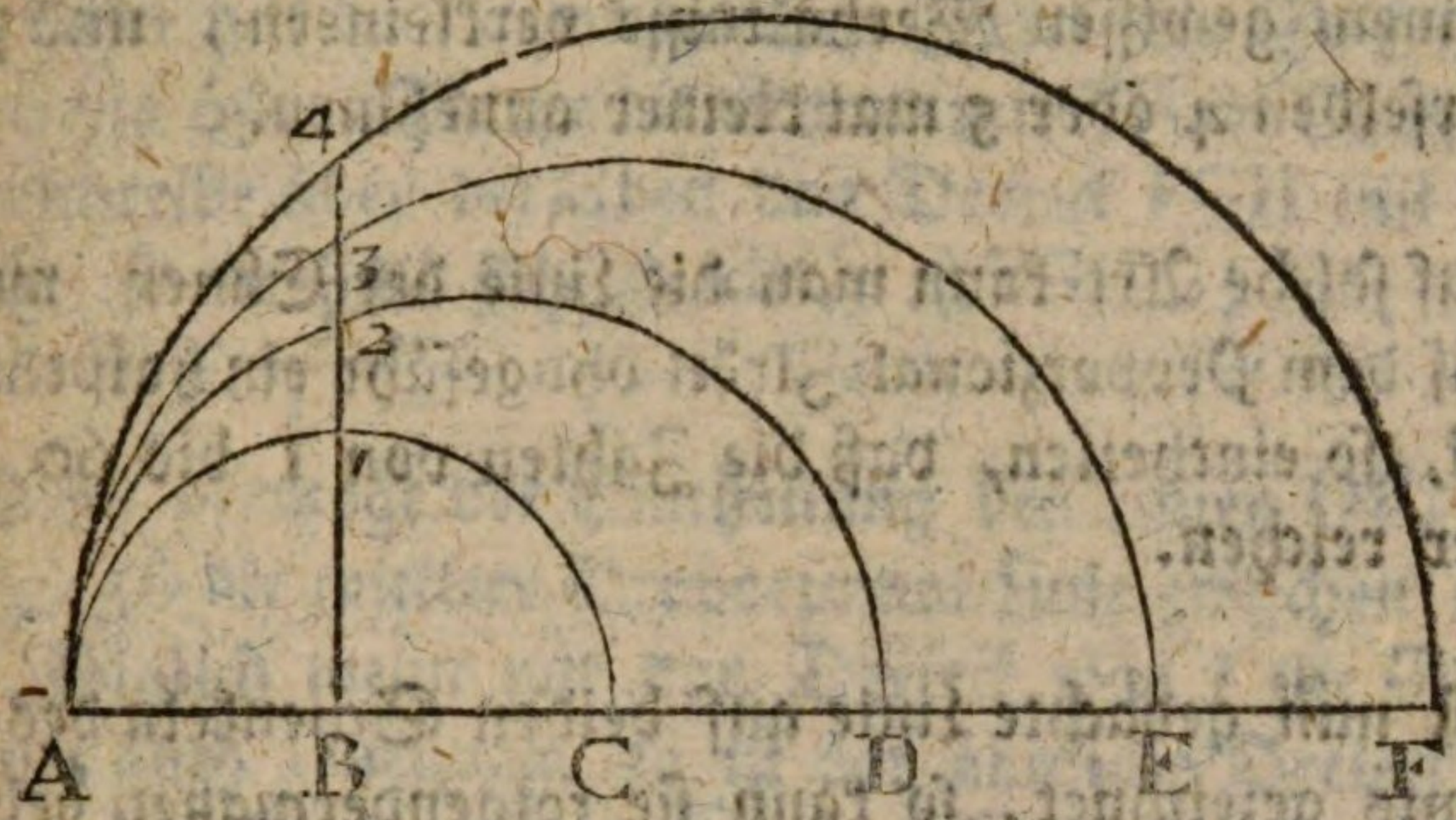
(110.. 110), (70.. 70), (40 .. 40) :: (A.. 110)
(A .. 70), (A .. 40).

§. 13.

Neben der arithmetischen Linie lieget auf dem Proporzional-Zirkel die geometrische Linie oder die Linie der

Ebnen

Ebnen (la ligne des plans). Diese kann auf folgende Weise eingetheilet werden.



Nimm eine willkührliche Linie AB zur Einheit. Verlängere sie nach F, und mache BC = C D = DE = EF = &c. = AB.

Ueber AC, AD, AE, AF &c. beschreibe halbe Zirkel.

Ueber B errichte eine senkrechte Linie, welche die Umkreise alle schneiden wird.

So ist B 1 die mittlere Proporzional Linie zwischen AB und BC oder 1 und 1, und ist = 1.

B 2 ist die mittlere zwischen AB und BD oder zwischen 1 und 2.

B 3 zwischen AB und BE oder zwischen 1 und 3

B 4, zwischen AB und BF oder zwischen 1 und 4.

Und so kann man weiter gehen.

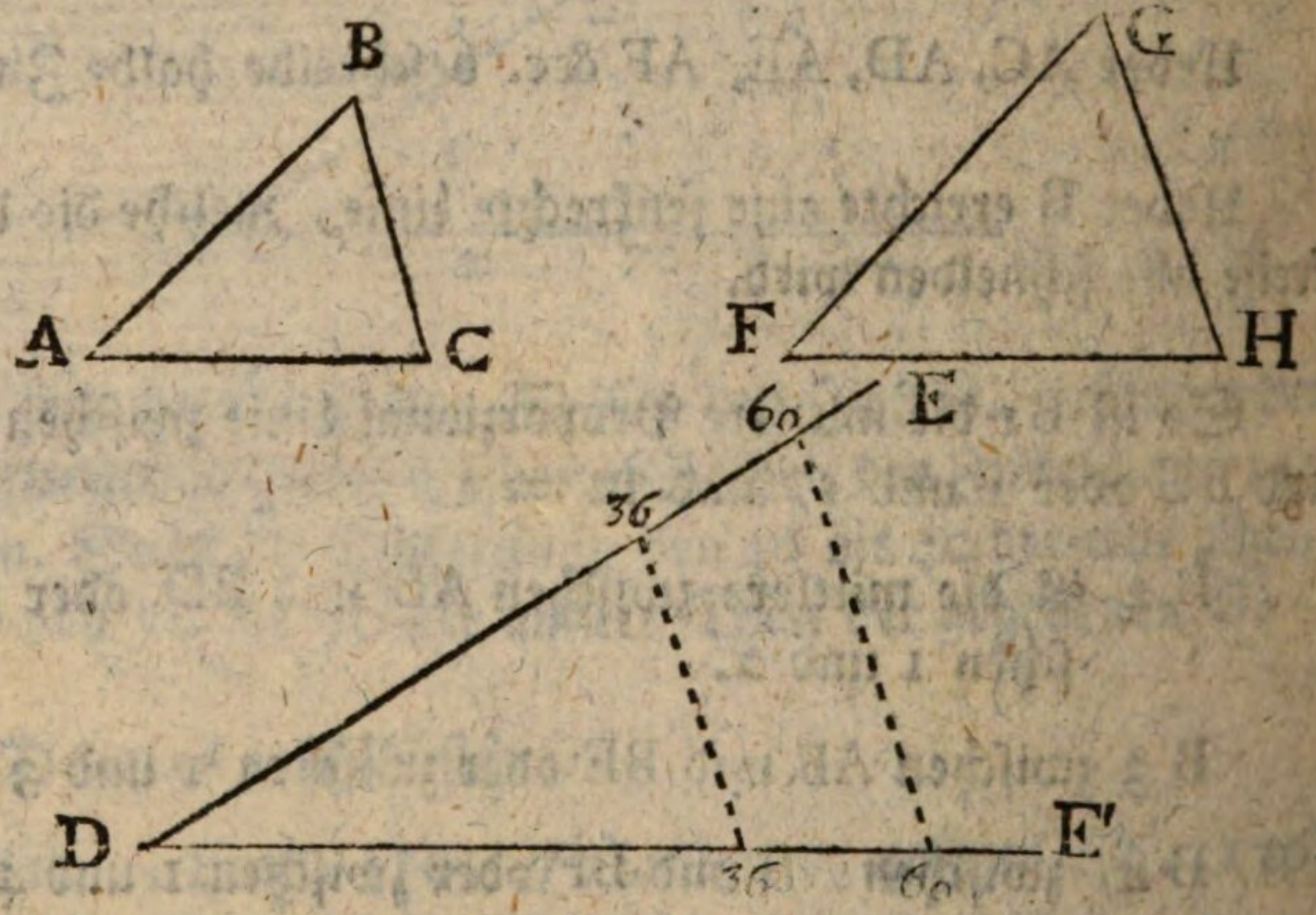
Trage die Linien B 1, B 2, B 3, B 4, &c. auf die Linie der Ebnen vom Mittelpunkte des Instrumentes an, so wohl auf dem einen als auf dem anderen Schenkel.

Um eine genauere Eintheilung zu bekommen, kann man die Einheit AB anfänglich ziemlich groß annehmen. Hernach aber muß man alle Linien B1, B2, B3, u. s. f. nach einem gewissen Verhältnisse verkleinern, und z. E. jede derselben 4 oder 5 mal kleiner annehmen.

Auf solche Art kann man die Linie der Ebnen, welche nur auf dem Proporzional-Zirkel ohngefähr ein halben Fuß lang ist, so eintheilen, daß die Zahlen von 1 bis 60 oder darüber reichen.

Ist nun gedachte Linie auf beiden Schenkeln des Instruments gezeichnet, so kann sie folgendermaßen gebrauchet werden.

I) Es sey gegeben das Dreieck ABC und es werde ein



ähnliches verlanget, so daß △ABC zum verlangten Dreiecke sich verhalte wie 3 zu 5.

Nimm zwei Zahlen, die sich verhalten wie 3 zu 5, z. E. 3 und 5 selbst, oder um mehrerer Bequemlichkeit willen, 36 und 60.

Faße

Faße mit dem Zirkel die Grundlinie AC, und öfne die beiden Schenkel DE, DE' des Proporzional-Zirkels bis die AC von 36 bis 36 reichet, das ist bis 36 . . 36 = AC. Fasse dann mit dem gewöhnlichen Zirkel die Entfernung von 60 bis 60. Mache die Grundlinie FH = 60 . . . 60, und beschreibe über derselben das Dreieck FGH mit ABC ähnlich, so verhält sich △ABC, △FGH :: 36, 60 :: 3, 5.

Denn vermöge der Eintheilung den Linien DE, DE' ist D . . 36 die mittlere Proporzional-Linie zwischen 1 und 36. Folglich wenn wir das Dreieck was 1 zur Grundlinie hat auch 1 nennen, so ist das ähnliche Dreieck über D . . 36, auch 36. Aus eben dem Grunde ist das Dreieck über D . . 60 = 60. Also verhält sich ein Dreieck über D . . . 36, zu einem ähnlichen Dreiecke über D . . 60, wie 36 zu 60.

Nun ist D . . 36 zu D . . 60 wie 36 . . 36 zu 60 . . 60. Also ist auch das Dreieck über 36 . . 36 zum Dreiecke über 60 . . 60 wie das Dreieck über D . . 36 zum Dreiecke über D . . 60, das ist, das Dreieck ABC über AC (= 36 . . 36) verhält sich zum Dreiecke FGH über FG (= 60 . . 60) wie 36 zu 60 oder wie 3 zu 5.

II) Wenn zwei ähnliche Dreiecke oder andere Figuren gegeben sind, und man will das Verhältniß ihres Flächen-Inhaltes finden, so fasse man die eine Seite der einen Figur mit dem gemeinen Zirkel, und öfne den Proporzional-Zirkel nach Belieben, doch so, daß beide Spitzen des gemeinen Zirkels auf beiden Schenkeln die nemliche Zahl erreichen.

Man fasse ebenfalls die homologe Seite der anderen Figur, und versuche, welche Zahl sie auf beiden Schenkeln erreichet, so zeigen beide Zahlen das Verhältniß der Figuren an.

Z. E. Die Grundlinien eines Dreieckes reiche von 60 bis 60, die Grundlinien des anderen reiche von 6 bis 36, so verhalten sich die ähnlichen Dreiecke wie 60 zu 36 oder wie 5 zu 3.

§. 14.

Neben der Linie der Ebnen trift man auf dem Proporzional Zirkel die Polygonal-Linie an.

Diese entspringet aus demselben Mittelpunkte, als die übrigen Linien, und machet mit der gleichtheiligen Linie, wie auch mit der Linie der Ebne einen kleinen Winkel.

Man beschreibe auf einer Ebne einen Kreis, und in demselben ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck, u. s. f. bis zum Zwölfecke. Denn weiter pfleget man nicht zu gehen.

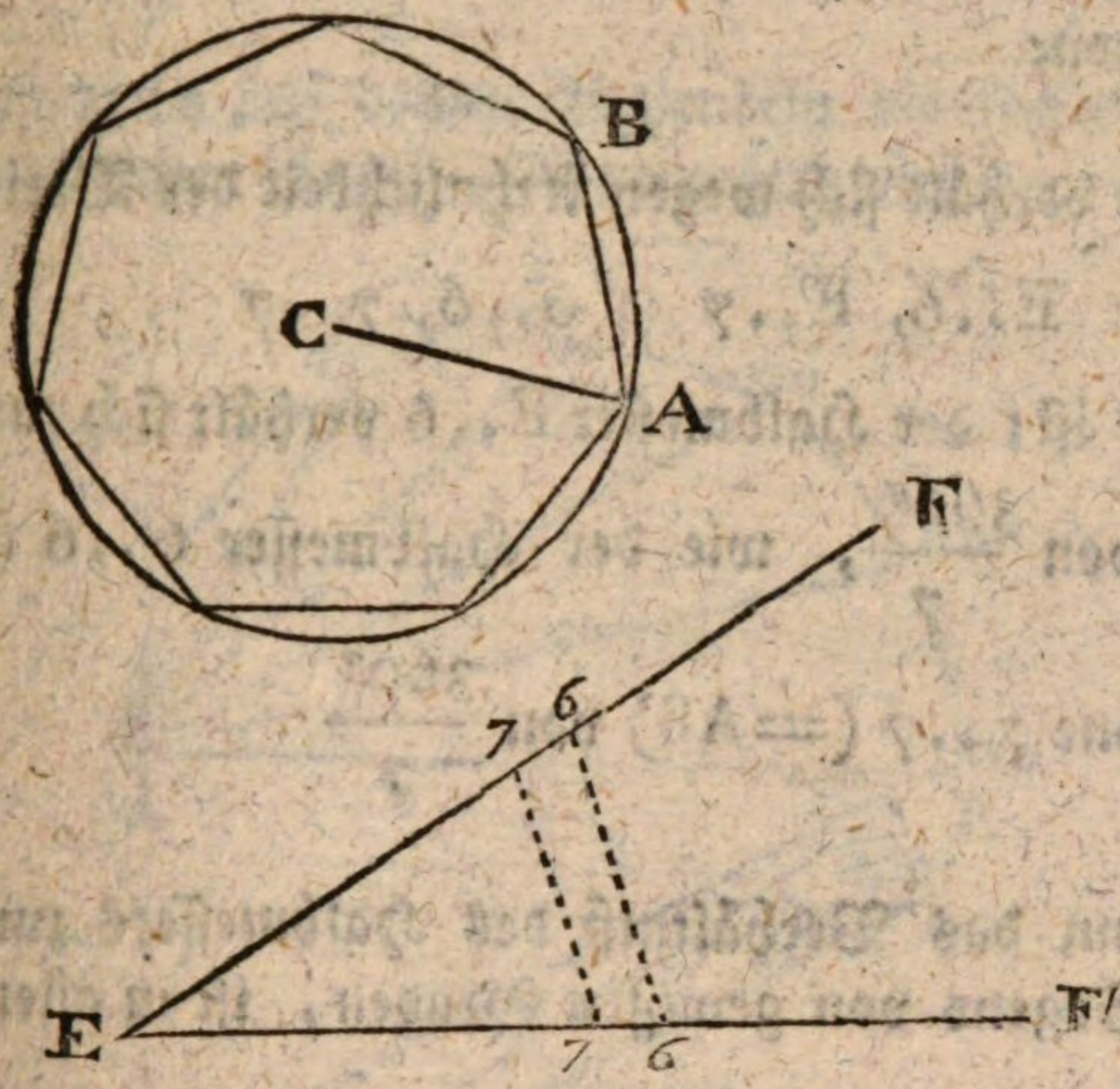
Vom Mittelpunkte des Instruments aus, trage man auf die Polygonal-Linie die Seite des Zwölfecks, des Eilfecks, des Zehnecks, u. s. f. bis zum Dreieck, und schreibe allemal am Ende die Anzahl der Winkel oder Seiten.

Nachdem dieses auf einem Schenkel des Instruments geschehen, so verrichte man das nemliche auf dem anderen Schenkel.

So ist die Polygonal-Linie fertig. Um die Verwirrung der Linien zu vermeiden, pfleget man den Theil der Polygonal Linie von der Zahl 12 bis zum Mittelpunkte ungezeichnet zu lassen.

Hat man den Zirkel etwas klein angenommen, so kann man die Linien alle nach einem gewissen Verhältnisse vergrößern.

I) Gesetzet nun es soll in einem Zirkel ein reguläres Siebeneck eingeschrieben werden.



So fasse ich mit dem gewöhnlichen Zirkel den Halbmesser CA.

Ich öfne den Proporzional-Zirkel bis der Halbmesser CA von 6 bis 6 reichet.

Ferner fasse ich mit dem gewöhnlichen Zirkel die Entfernung von 7 bis 7, so ist diese die Seite des Siebenecks für den Halbmesser CA.

Diese Distanz 7..7 trage ich von A nach B, und so ferner in dem Umkreise herum, so ist der Umkreis in 7 gleiche Theile getheilet, und es kann folglich das Siebeneck nun sehr leicht vollendet werden.

Dieses ist nicht schwer zu beweisen, wenn man sich nur erinnert, daß die Seite des Sechsecks allemal dem Halbmesser gleich ist.

Also ist E..6 der Halbmesser des Zirkels, wornach die Polygonal=Linie auf dem Proporzional=Zirkel gezeichnet worden.

Nun verhält sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

E.,6, E.,7 :: 6..6, 7..7

Das ist: der Halbmesser E,.6 verhält sich zur Sehne E..7, von $\frac{360^g}{7}$, wie der Halbmesser 6,.6 (=CA) zur Sehne 7,.7 (=AB) von $\frac{360^g}{7}$

Denn das Verhältniß des Halbmessers zur Sehne eines Bogens von gewissen Graden, ist in allen Zirkeln einerlei.

II) Es sey die Seite BA des Siebenecks gegeben, und es werde der Halbmesser CA des umgeschriebenen Zirkels verlanget.

Fasse BA mit dem gemeinen Zirkel, und öfne die Polygonal=Linie bis die BA von 7 bis 7 reichet. Fasse nun mit dem gemeinen Zirkel die Entfernung von 6 bis 6, so ist 6.,6 die Seite des Sechsecks oder der verlangte Halbmesser AB.

Der Beweis ist ohngefähr wie beim ersten Falle.

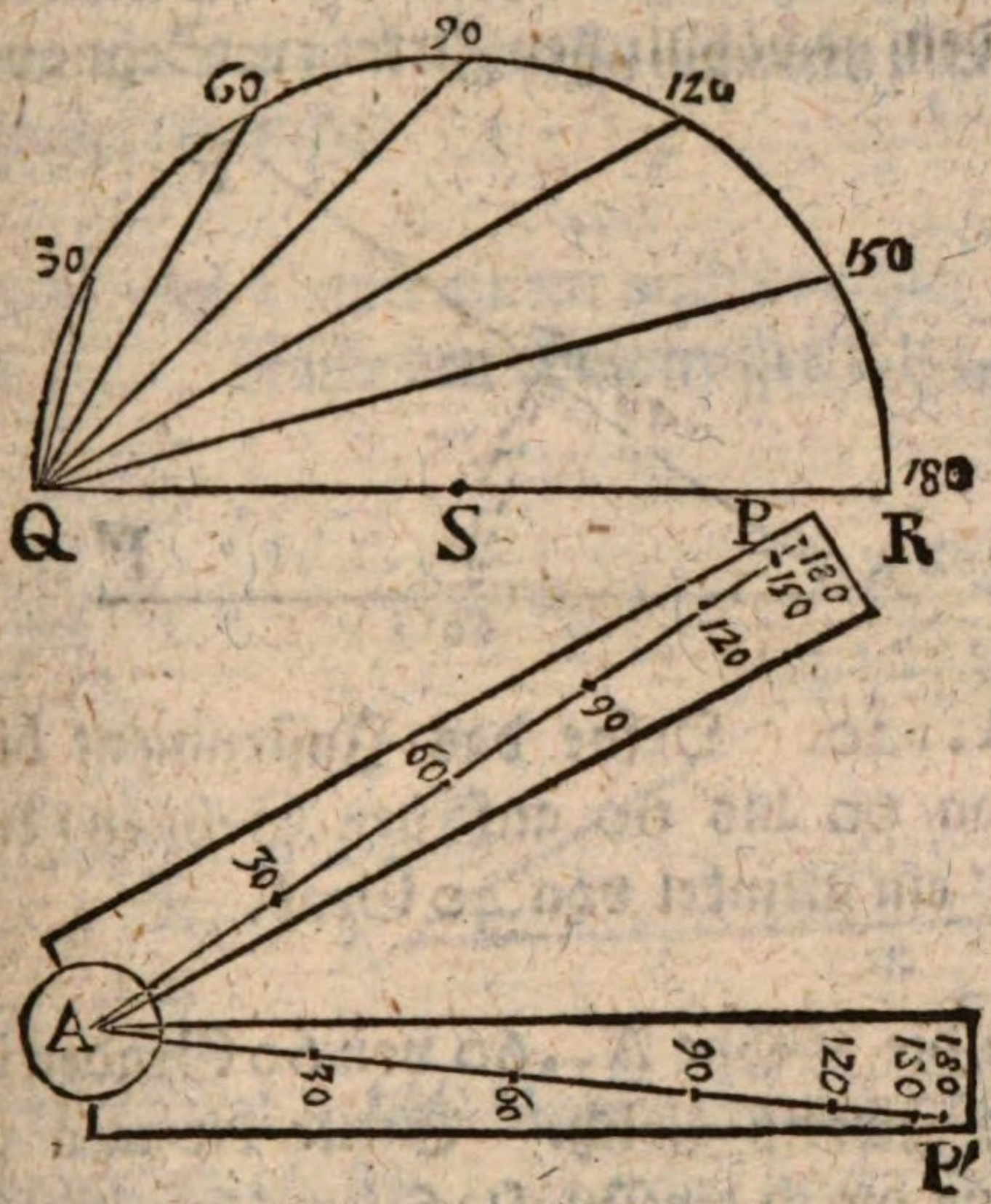
§. 15.

Da wir nun die Linien der gleichen Theile, der Ebnen, und der Vielecke auf dem Proporzional=Zirkel betrachtet haben, so kehren wir das Instrument um, um zu sehen, welche Linien auf der anderen Seite zu merken sind. Die

erste

erste ist die Sehnen-Linie (ligne des Cordes). Man erhält ihre Eintheilungen auf folgende Art.

Man ziehe auf beiden Schenkeln die Linien AP und AP′ von gleicher Länge. Man nehme auf einer Ebne die



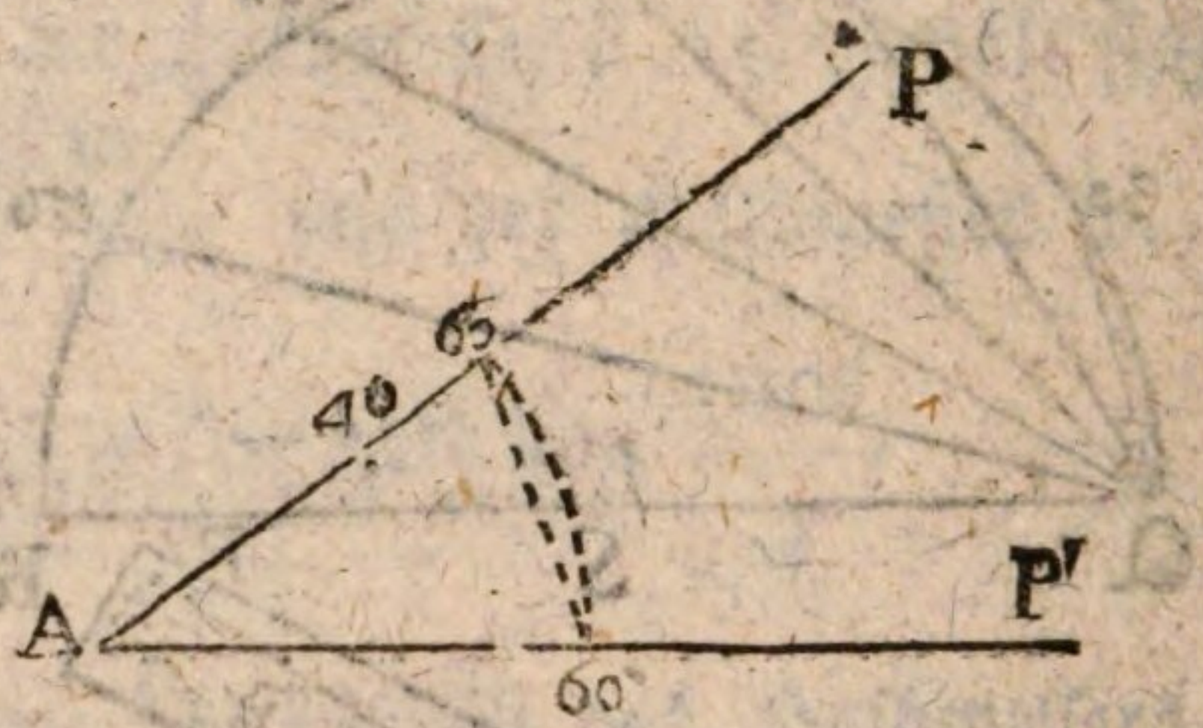
QR = AP = AP′, theile sie im Punkte S in zwei gleiche Theile, und beschreibe aus S mit dem Halbmesser SQ oder SR einen halben Zirkel über QR.

Man theile den halben Zirkel in seine Grade, entweder durch bloßes Versuchen, oder vermittelst einer akkuraten Theilscheibe. Man ziehe aus Q die Sehnen für jeden Grad, als zum Beispiel Q..30, Q..60, Q..90, Q..120, Q..150, Q..180.

Diese Sehnen trage man auf die Linien AP, AP′ des Proporzional-Zirkels, von A nach P und P′ zu, und schreibe an den Enden derselben die Zahlen, welche die Grade anzeigen, zu denen sie gehören. So ist die Sehnen-

nen-Linie fertig. Der Gebrauch derselben wird aus folgenden Exempeln erhellen.

I) Gesetzet es solle der Proporzional-Zirkel so geöfnet werden, daß beide Sehnen-Linien einen Winkel machen, deren Grade bestimmet sind, z. E. einen Winkel von 40 Grad. Fasse mit dem gewöhnlichen Zirkel die Sehne von 40 Grad,



nemlich A..40. Oefne das Instrument bis die Länge A..40 von 60 bis 60 auf den Sehnen-Linien reichet, so ist PAP' ein Winkel von 40 Grad.

Denn die Sehne A..60 von 60 Graden ist dem Halbmesser des Zirkels gleich. Stelle dir also vor, es gehe der Umkreis durch die Punkte 60 und 60. Ist nun die gerade Linie 60..60 = A..40, nemlich der Sehne von 40 Grad, so ist der Bogen 60..60 ein Bogen von 40 Grad, folglich ist A oder PAP' ein Winkel von 40^{g}.

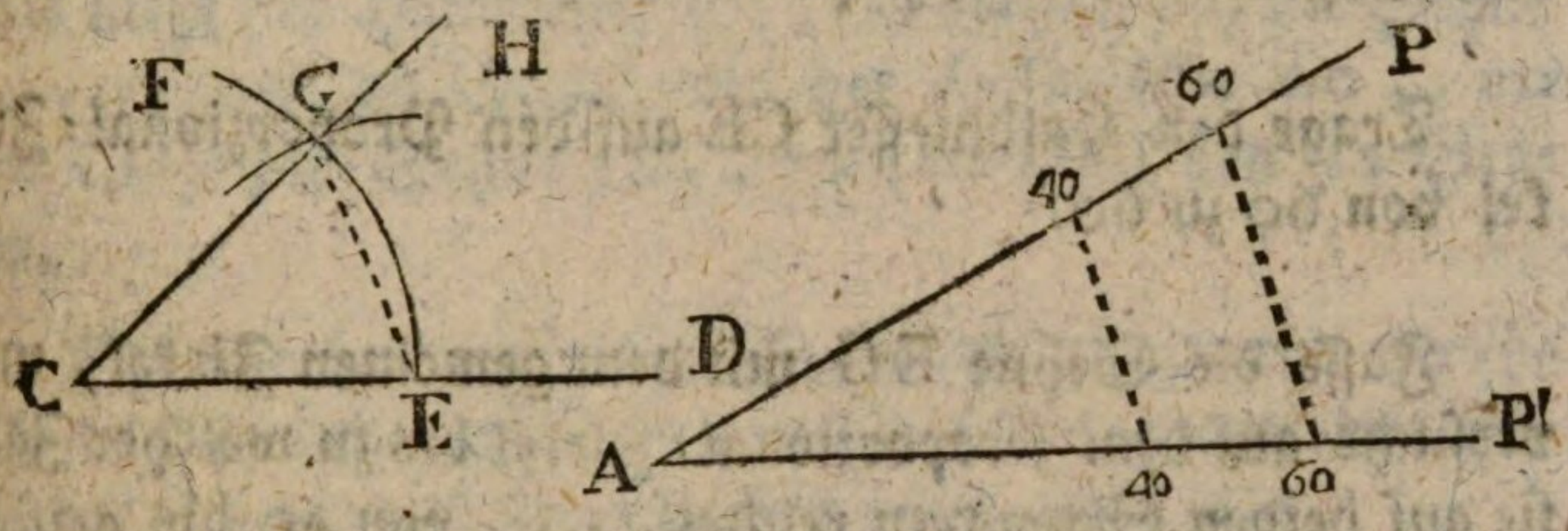
II) Es stehet der Proporzional-Zirkel in einer gewissen Oefnung, und es sollen die Grade seiner Oefnung gefunden werden.

Man fasse mit dem gewöhnlichen Zirkel die Entfernung von 60 bis 60 auf den Linien AP und AP' (vorige Fig.) Trage diese Entfernung von A nach P oder P' zu, auf der Sehnen-Linie, und merke die Zahl bis wo sie hinreichet, z. E. 40, so zeiget solche Zahl die Grade der Oefnung an.

Denn, indem man die Entfernung 60..60 faßt, so nimmt man eigentlich die Sehne des Bogens 60..60, und auf der Linie AP findet man wie viel Grade der Bogen oder der Winkel hat, wozu die Sehne gehöret.

III) Gesetzet es soll auf einer geraden Linie CD am Punkte C ein Winkel von gewissen Graden, z. E. von 40 Graden gestellet werden.

Beschreibe aus C mit einem willkürlichen Halbmesser den Bogen EF. Fasse den Halbmesser CE und öfne den



Proporzional-Zirkel, bis die Entfernung 60..60 dem Halbmesser CE gleich sey.

Fasse dann die Entfernung 40..40 mit dem gemeinen Zirkel, und aus E beschreibe einen Bogen, der den Bogen EF irgendwo in G schneiden wird.

Durch C und G ziehe die gerade CH, so ist $\angle$ C oder $\angle HCD = 40^g$.

Denn in den ähnlichen Dreiecken A..60..60 und A..40..40 ist

(A..60), (60..60) :: (A..40), (40..40).

Es ist aber A..60 der Halbmesser und A..40 die Sehne von 40 Grad, 60..60 ein anderer Halbmesser

(=CE), und folglich 40..40 (=EG) die dazu gehörige Sehne von 40 Grad.

Da also EG die Sehne von 40 Graden für den Halbmesser CE ist, so hält der Bogen EG und folglich der Winkel C, 40 Grade.

IV) Gesetzet es sollen die Grade eines geradlinichten Winkels HCD gefunden werden. (Vorige Fig.)

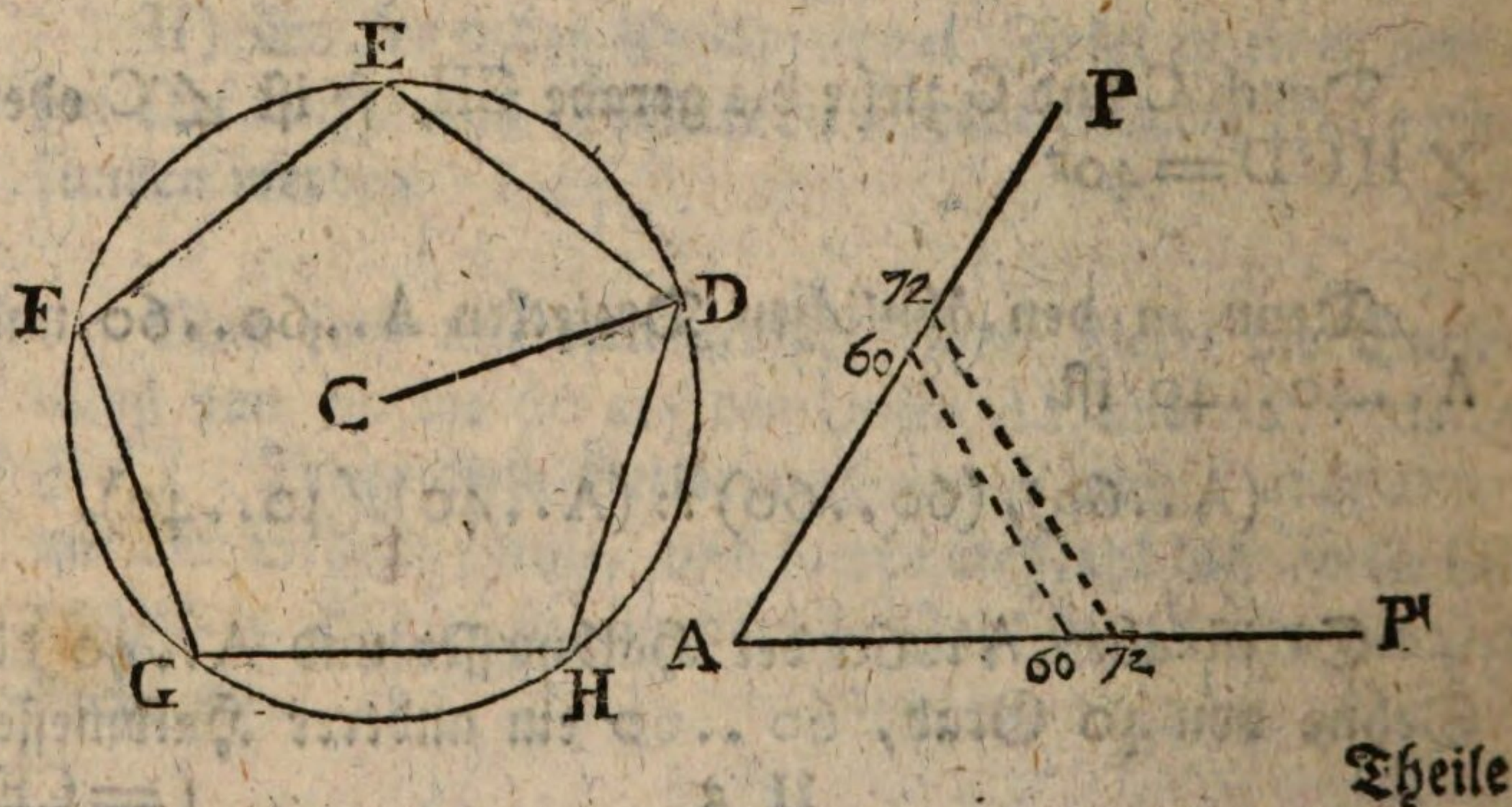
Beschreibe aus C mit einem willkürlichen Halbmesser den Bogen EG, und ziehe die Sehne EG.

Trage den Halbmesser CE auf den Proporzional-Zirkel von 60 zu 60.

Fasse die Sehne EG mit dem gemeinen Zirkel, und versuche auf dem Proporzional-Zirkel bis zu welcher Zahl sie auf beiden Schenkeln reichet, z. E. von 40 bis 40, so zeiget die Zahl 40 an, daß der Winkel HCD 40 Grade hält.

Der Beweis ist ohngefähr wie im vorigem Falle.

V) Gesetzet es soll der Umkreis eines Zirkels C in einige gleiche Theile getheilet werden, z. E. in 5 gleiche



Theile

Theile. Dividire 360^s durch 5, so kommen für jeden Theil 72^s. Es kömmt also nur darauf an die Sehne DE von 72 Grad für den Halbmesser CD zu finden.

Oefne den Proporzional-Zirkel bis die Entfernung 60 . . . 60 dem Halbmesser CD gleich sey.

Fasse die Entfernung 72 . . 72, und trage sie auf den Umkreis in DE, hernach weiter in EF, in FG, in GH und in HD, so ist die Eintheilung geschehen.

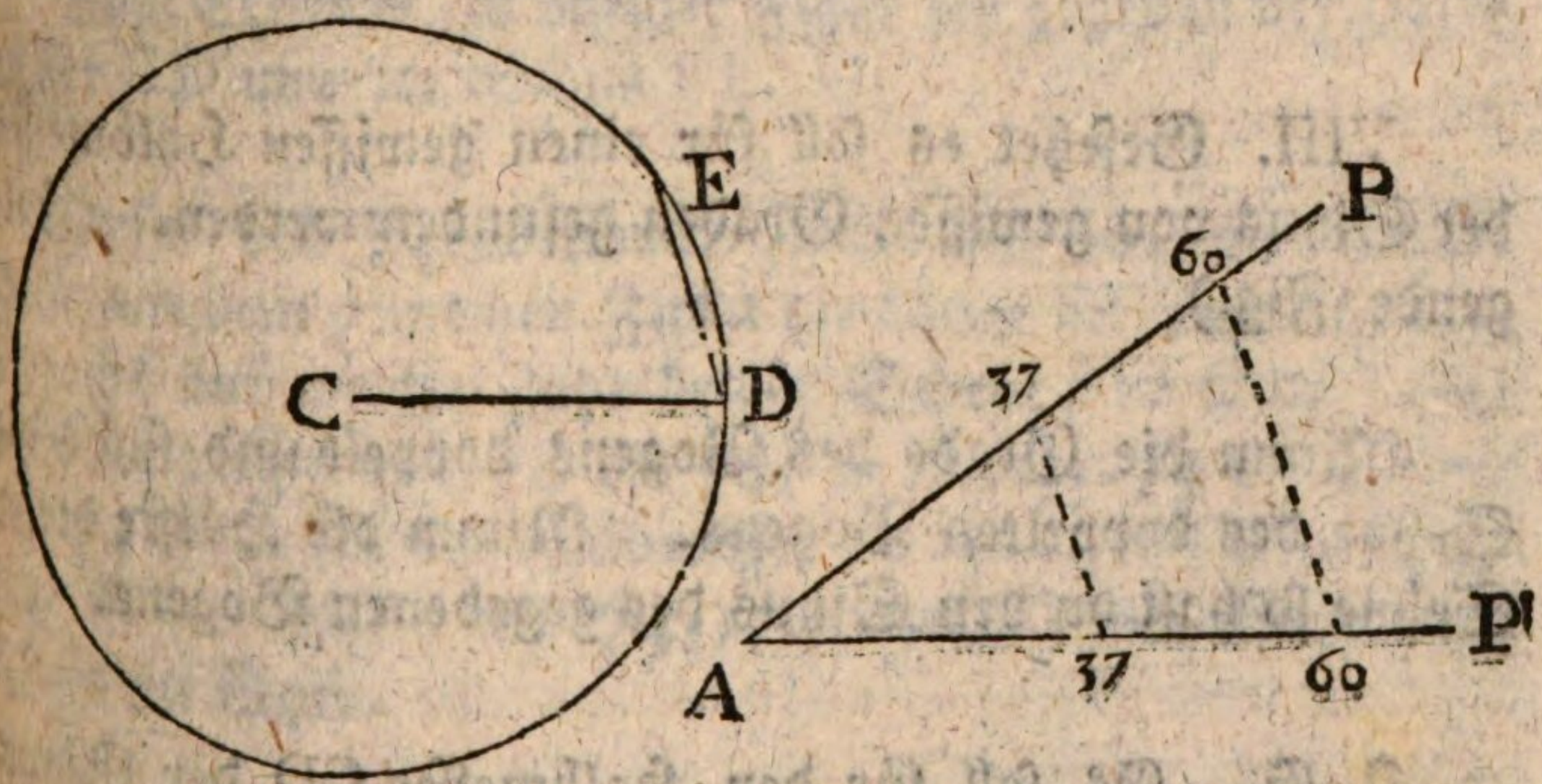
Denn es ist, wegen der ähnlichen Dreiecke,

(A . . 60), (60 . . 60) :: (A . . 72), (72 . . 72)

Das heißt der Halbmesser A . . 60 verhält sich zur Sehne A . . 72 von 72 Grad, wie der Halbmesser 60 . . 60 (= CD) zur Sehne 72 . . 72 (= DE) von 72 Graden.

Die Eintheilung eines Umkreises in gewisse gleiche Theile läßt sich auch vermittelst der Polygonal-Linie verrichten, wovon wir schon vorher geredet haben.

VI) Gesetzet es soll überhaupt die Sehne von gewissen Graden für einen gegebenen Halbmesser gefunden werden.



Es soll zum Exempel im Zirkel dessen Halbmesser = CD die Sehne DE von 37 Grad gefunden werden.

Oefne

Oefne den Proporzional-Zirkel so, daß 60..60 dem Halbmesser CD gleich sey. Nimm die Entfernung 37 ..37, so ist sie der Sehne DC von 37 Graden gleich.

Der Beweis ist wie in vorigen Fällen.

VII. Gesetzet es ist der Halbmesser und eine Sehne geneben, es soll gefunden werden zu wie viel Graden die Sehne gehöret.

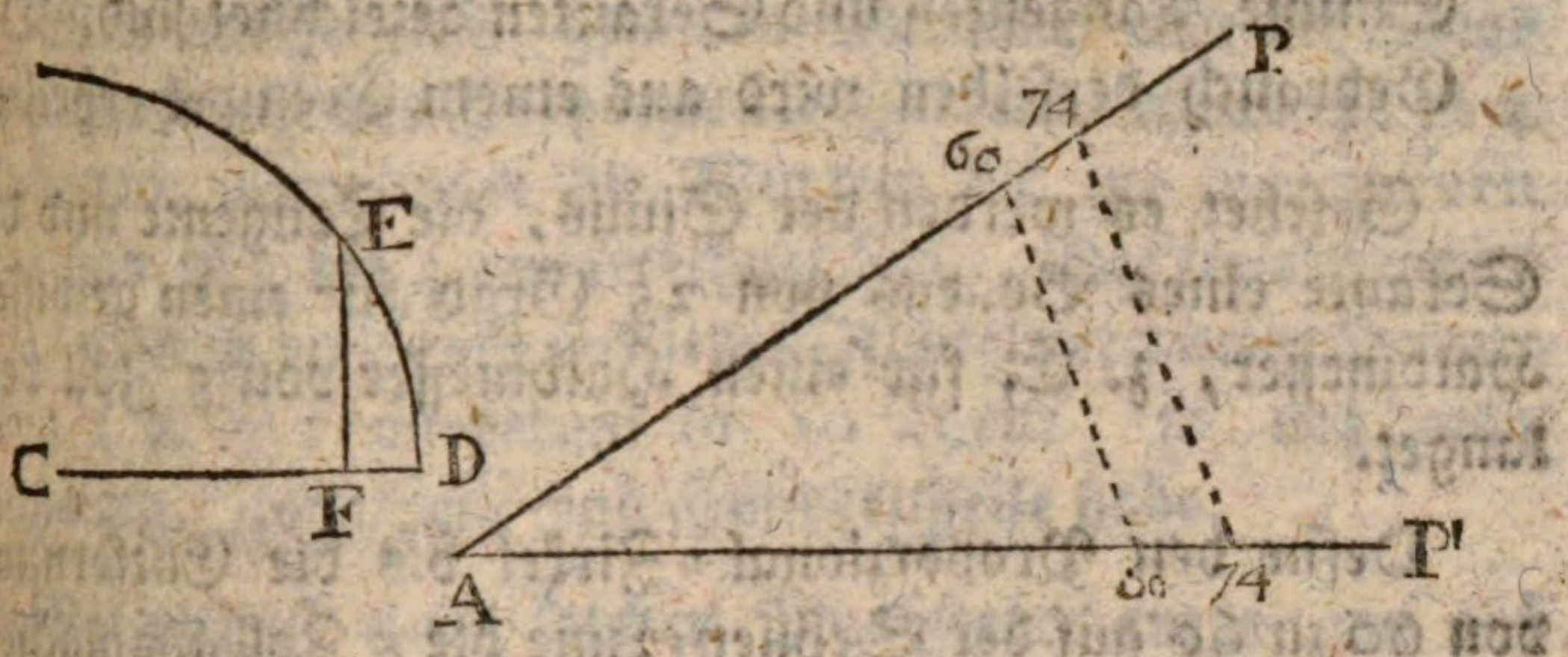
Es sey der Halbmesser CD und die Sehne DE. Oefne den Proporzional-Zirkel so daß 60..60 = CD. Faße DE mit dem gewöhnlichen Zirkel und versuche auf welche Zahl der beiden Schenkel die Enden derselben fallen. Z.E. Wenn DE von 37 bis 37 reichet, so ist DE die Sehne von 37 Grad für den Halbmesser CD.

Der Beweis beruhet allemal auf der nemlichen Proporzion. Der Halbmesser A..60 verhält sich zum Halbmesser 60..60 (= CD) wie die Sehne A..37 von 37 Grad, zur Sehne 37..37 (= DE) von eben so viel Graden.

VIII. Gesetzet es soll für einen gewissen Halbmesser der Sinus von gewissen Graden gefunden werden. (Folgende Fig.)

Nimm die Grade des Bogens doppelt und suche die Sehne des doppelten Bogens. Nimm die Hälfte dieser Sehne so hast du den Sinus des gegebenen Bogens.

Z. E. Es soll für den Halbmesser CD der Sinus EF eines Bogens DE von 37 Grad gefunden werden. Mache die Oefnung 60..60 = CD. Fasse die Entfernung



nung 74 . . 74, so hast du die Sehne von 74 Grad für den Halbmesser 60 . . (= CD). Halbire die Sehnen 74 . . 74, so bekömst du den Sinus EF des Bogens DE $= \frac{74}{2} = 37^{g}$.

IX. Gesetzet es sey der Halbmesser und ein Sinus gegeben, und es sollen die Grade des Bogens DE gefunden werden.

Nimm den Sinus doppelt, so hast du die Sehne des doppelten Bogens. Suche die Grade des Bogens und nimm die Hälfte davon.

Zum Exempel, in voriger Figur sey gegeben der Halbmesser CD und der Sinus FE.

Oefne den Proporzional-Zirkel bis 60 . . 60 = CD. Fasse mit dem gemeinen Zirkel die Länge EF doppelt, und versuche auf welche Zahl beider Schenkel sie fällt. Gesetzet sie reiche von 74 bis 74, so ist 74 . . 74 die Sehne von 74 Grad für den Halbmesser 60 . . 60 (= CD). Folglich ist die Hälfte von 74 . . 74 oder EF der Sinus von $\frac{74}{2} = 37$ Grad.

Anmerkung. Es giebt Proporzional-Zirkel, worauf außer der Sehnen-Linie noch besondere Linien für die Sinusse,

Sinusse, Tangenten und Sekanten gezeichnet sind. Der Gebrauch derselben wird aus einem Exempel erhellen.

Gesetzet es werden der Sinus, die Tangente nnd die Sekante eines Bogens von 25 Grad für einen gewissen Halbmesser, z. E. für einen Halbmesser von 5 Zoll verlanget.

Oefne den Proporzional-Zirkel bis die Entfernung von 60 zu 60 auf der Sehnen-Linie die 5 Zoll ausmachet.

Miß die Entfernung von 25 zu 25 auf der Sehnen-Linie, so hast du die Sehne von 25 Grad, die Entfernung von 25 bis 25 auf der Sinus-Linie giebt dann zugleich den Sinus von 25 Grad, die Entfernung von 25 bis 25 auf der Tangenten-Linie giebt die Tangente, und auf der Sekanten-Linie die Sekante von 25 Grad. Und im gegenwärtigen Falle gehören sowohl die Sehne als der Sinus, die Tangente und die Sekante von 25^{g} zu einem Halbmesser von 5 Zoll.

§. 16.

Neben der Sehnen-Linie pfleget auf dem Proporzional-Zirkel die Körper-Linie gezogen zu seyn, welche wie alle übrigen Linien aus dem Mittelpunkte des Scharniers ausgehet, und auf beiden Schenkeln verzeichnet ist. Jedoch werden die Ender, gegen den Mittelpunkt zu, nicht ausgezeichnet, wie bei der Polygonal-Linie gemerket worden.

Um die Eintheilung der Körper-Linien zu verrichten, suche die Kubikwurzeln der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u s.f. bis so weit du willst, z. E. bis 64. Dieses geschiehet am bequemsten vermittelst der Logarithmentafeln. Es wird nemlich der Logarithmus jeder Zahl durch 3 dividiret, und dann die zum dritten Theile des Logarithmus gehörige Zahl aufgesuchet. So findet man

Würfel	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8 &c.
Wurzeln	1;00	1;26	1;44	1;58	1;71	1;81	1;91	2;00

Man

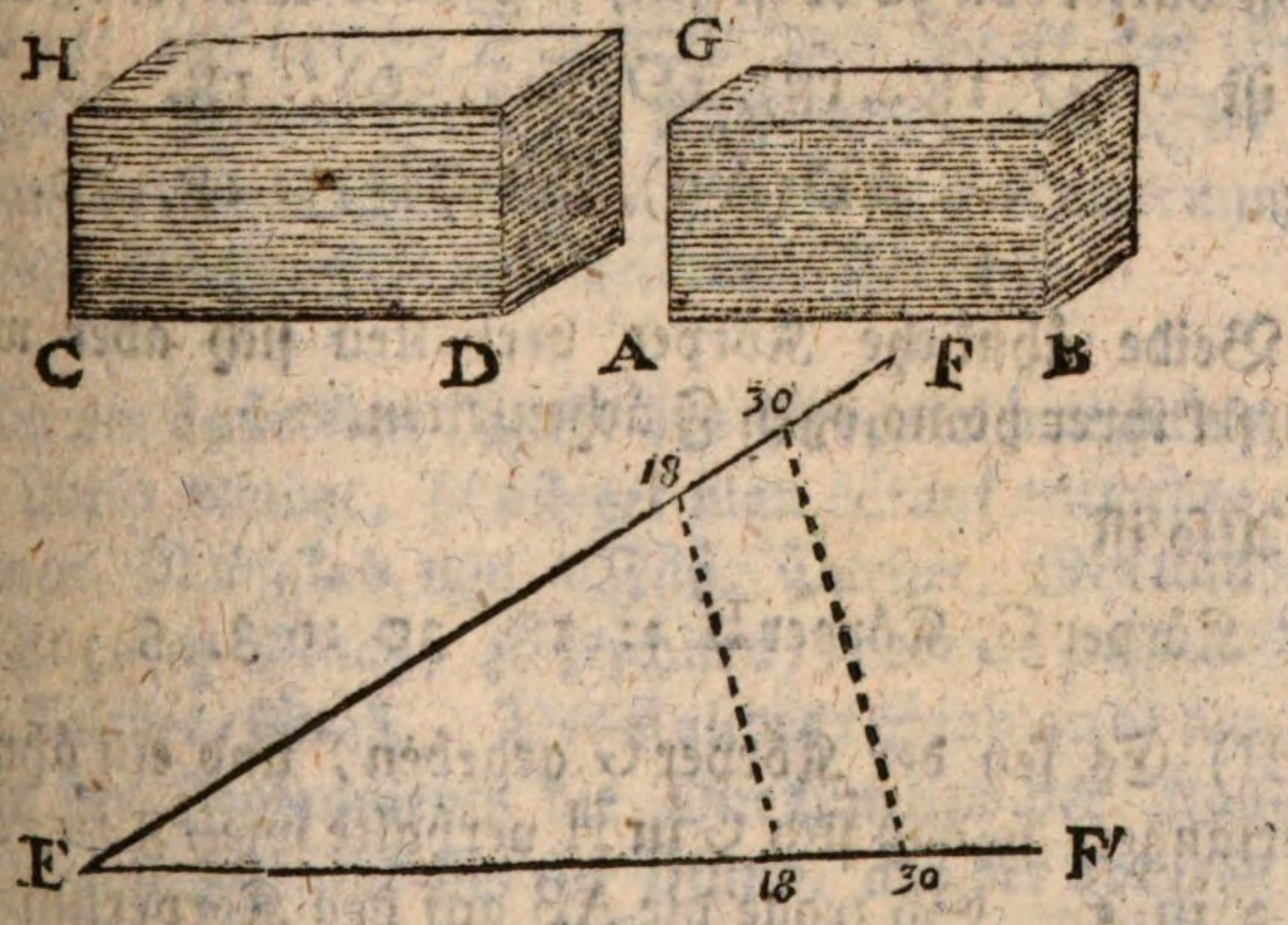
Man mache einen genauen Maaßstab von der Länge der Körperlinie des Proporzional-Zirkels, theile ihn in 4 Einheiten, wenn man die Wurzeln bis zur Wurzel von 64, das ist, bis 4 ausgerechnet hat. Die lezte Einheit theile man in 10 Theile und jedes Zehntel vermittelst Queerlinien (§. 7) wiederum in 10 Theile, so daß man Einheiten, Zehntheile und Hundertheile habe.

Vermittelst eines solchen Maaßstabes trage man auf die Körperlinie vom Mittelpunkte des Instruments an die Wurzeln 1;00 1;26 1;44 1;58 1;71 u. s. f. und schreibe am Ende jeder Wurzel ihren Würfel, nemlich 1, 2, 3, 4, 5, u. s. f.

Geschiehet dieses auf beiden Schenkeln des Proporzional-Zirkels, so ist die Körperlinie fertig.

Der Gebrauch dieser Linie ist folgender.

I) Man hat zwei ähnliche Körper, und will das Verhältniß derselben erfahren, z. E. das Verhältniß zweier ähnlicher Parallelepipeden.



Man fasse mit dem gewöhnlichen Zirkel eine Flächenseite CD des einen Körpers, öfne nach Belieben den Proporzional-Zirkel, und trage die CD so auf demselben, daß beide

beide Enden die nemliche Zahl auf beiden Schenkeln erreichen. Z. E. Es reiche CD von 30 bis 30.

Fasse AB, die homologe Seite des andern Körpers, und versuche, welche Zahl beider Schenkel sie erreichet, z. E. 18.

So verhält sich lezter Körper zum ersten wie 18 zu 30, oder wie 3 zu 5.

Denn, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ist

(18..18), (30..30) :: (E..18), (E..30)

Da nun diese vier Linien proporzioniret sind, so sind auch ihre dritten Potenzen proporzioniret, oder es sind ihre Würfel proporzioniret, weil die dritten Potenzen die Würfel vorstellen. Also ist

W(18..18), W(30..30) :: W(E..18), W(E..30)

Weil E..18 die Kubikwurzel von 18 und E..30 die Kubikwurzel von 30 vorstellet, so sind die Würfel 18 und 30,

also ist W(18..18), W(30..30) :: 18, 30

oder W(AB), W(CD) :: 18, 30.

Beide ähnliche Körper verhalten sich aber wie die Würfel ihrer homologen Flächenseiten.

Also ist

Körper G, Körper H :: 18, 30 :: 3, 5

II) Es sey der Körper G gegeben, und ein ähnlicher H verlanget, so daß sich G zu H verhalte wie 18 zu 30 oder wie 3 zu 5. So trage die AB auf den Korperlinien von 18 bis 18. Fasse alsdann die Entfernung von 30 bis 30. So giebt diese Linie 30..30 die Flächenseite CD, mit AB homolog, des verlangten Körpers H.

Anmerkung. Sind die Körper Kugeln, so werden anstatt der homologen Flächenseiten, die Durchmesser oder Halbmesser genommen.

§. 17.

Weil auf der Fläche des Instruments noch Raum übrig bleibet, so pfleget man auf derselben, auf beiden Schenkeln noch die Metallenlinie zu zeichnen. Sie gehet vom Mittelpunkte aus, wird aber nur bei dem Zeichen des Goldes sichtbar. Auf derselben sind sechs Metalle durch Zeichen angedeutet, nemlich ☉ Gold, ♄ Blei, ☾ Silber, ♀ Kupfer, ♂ Eisen, 4 Zinn, und neben den Zeichen stehen Punkte in der Metallenlinie.

Der Gebrauch dieser lezten Linie ist folgender. Gesetzet man hat einen Körper von Eisen, z. E. einen Würfel, und will wissen wie groß ein ähnlicher Körper vom nemlichen Gewichte seyn muß, wenn er aus Blei gemacht wird. Fasse mit dem gemeinen Zirkel die Flächenseite des Körpers, und öfne den Proporzional-Zirkel bis die gegebene Linie auf beiden Schenkeln den Punkt des Eisens erreichet. Nimm dann die Entfernung vom Blei zum Blei auf beiden Schenkeln. So ist diese Entfernung die homologe Flächenseite des bleiernen Körpers.

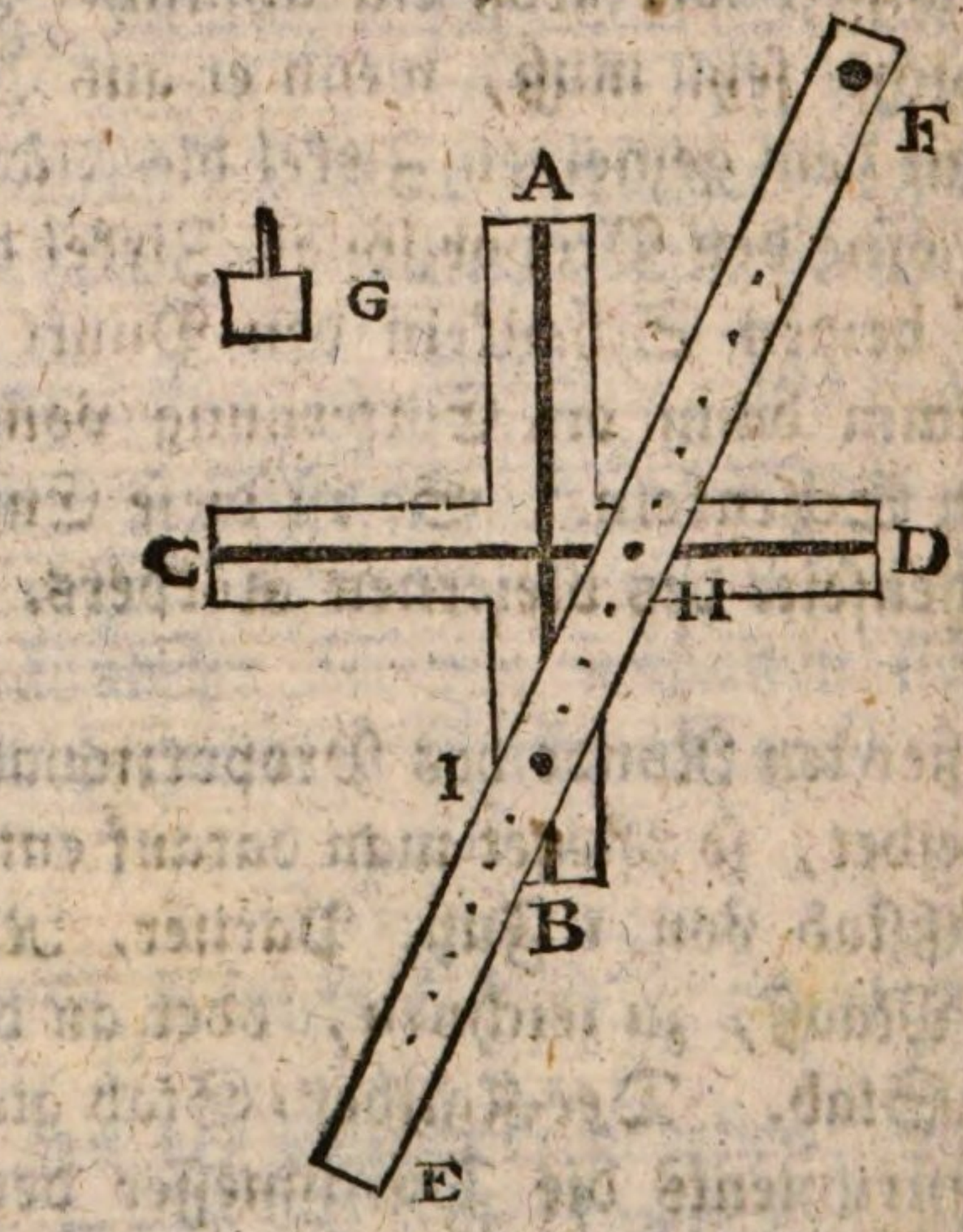
Da am äußersten Rande des Proporzionalzirkels noch Platz übrig bleibet, so pfleget man darauf entweder einen gemeinen Maaßstab von 1 Fuß, Pariser, Rheinländisch oder Englisch Maaß, zu zeichnen, oder an dessen Stelle einen Kaliber-Stab. Der Kaliber-Stab giebt auf einer Fläche des Instruments die Durchmesser der Kanonenkugeln von $\frac{1}{4}$ Pfund bis 60 Pfund, auf der anderen Fläche den Durchmesser der Oefnung der Kanone für Kugeln von $\frac{1}{4}$ Pfund bis 60 Pfund, welche Oefnung allezeit etwas größer seyn muß als der Durchmesser der Kugel.

Obgleich die Schwere der Metalle und der Kaliber der Kanonen nicht zur reinen Geometrie gehören, so haben wir doch nicht umhin gekonnt, den ganzen Gebrauch des Proporzionalzirkels hier kürzlich zu erklären.

Auf einigen Proporzional-Zirkeln trift man noch andere Linien an, die zur Verfertigung der Sonnenuhren dienen, wovon wir aber hier nicht handeln können.

§. 18.

Zulezt wollen wir noch den Gebrauch eines Instruments erklären, welches unter dem Namen des elliptischen Zirkels bekannt ist, und womit, wie es der Name andeutet, Ellipsen oder länglicht-runde krumme Linien beschrieben werden.



Es bestehet aus einem hölzernen oder messingenen Kreuze ABCD, in dessen Dicke die Rinnen oder Vertiefungen AB und CD ausgesäget sind. Dieses Kreuz wird auf dem

Papier

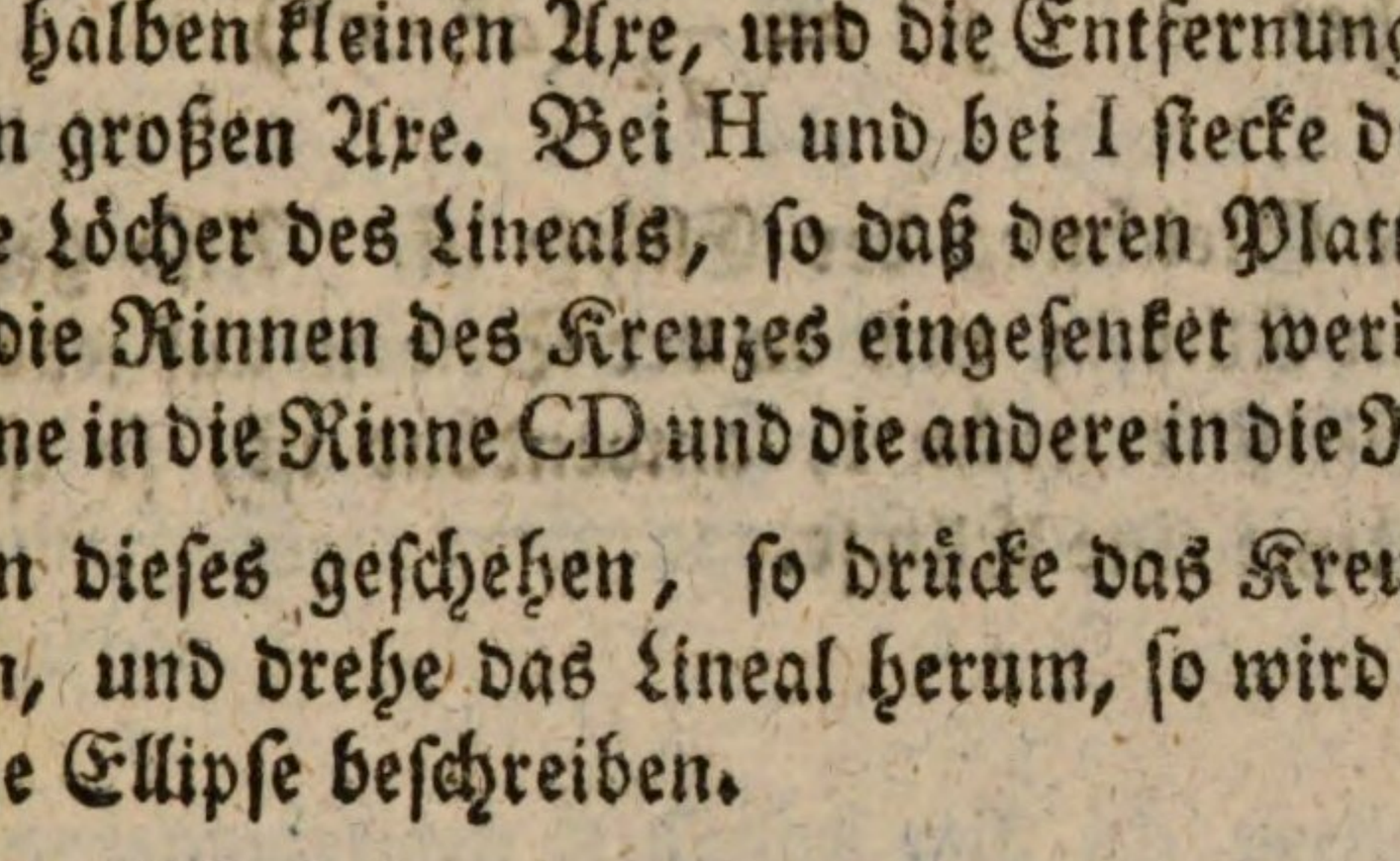
Papiere oder einer anderen Ebne festgehalten, vermittelst vier ganz kleiner Stifte, die auf der Rückseite in den Gegenden A, B, C und D angebracht sind.

EF ist ein bewegliches Lineal, worin viel kleine Löcher der Länge nach neben einander durchgeboret sind. Am Ende F ist ein größeres Loch, worin ein Bleistift befestiget werden kann.

G stellet eine kleine eiserne Schaufel vor, deren Stiel in die Löcher des Lineals und deren plattes Ende in die Rinnen des Kreuzes passet, doch ohne starke Reibung. Es gehören zwei solche Schaufeln zu diesem Instrumente.

Willst du nun eine Ellipse beschreiben, deren große und kleine Axe gegeben sind, so nimm die Entfernung FH gleich der halben kleinen Axe, und die Entfernung FI gleich der halben großen Axe. Bei H und bei I stecke die Schaufeln in die Löcher des Lineals, so daß deren Platten unterwärts in die Rinnen des Kreuzes eingesenket werden, nemlich die eine in die Rinne CD und die andere in die Rinne AB.

Wenn dieses geschehen, so drücke das Kreuz auf das Papier an, und drehe das Lineal herum, so wird das Bleistift F eine Ellipse beschreiben.



Es sey EF die jetzige Lage des Lineals. Ziehe FL mit AB und FM mit CD parallel. Es sey FI = *a*,

 FH

$FH = b$, $KL = MF = x$, $LF (= KM) = y$. Weil das Dreieck FMI rechtwinklich ist, so ist

$$(MI)^2 = (FI)^2 - (MF)^2$$

oder $$MI^2 = a^2 - x^2$$

Ferner, weil das Dreieck FMI in KH mit MF parallel geschnitten ist, so ist

$$FI, FH :: MI, MK$$

oder $$(FI)^2, (FH)^2 :: (MI)^2, (MK)^2$$

oder $$a^2, b^2 :: (a^2 - x^2), y^2$$

daher $$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

welches die Gleichung der Ellipse ist. Also gehöret der Punkt F zur Ellipse; und da der Beweis auf jeden Punkt, den der Bleistift zeichnet, anwendbar ist, so ist die beschriebene Linie eine Ellipse.

Zweiter Anhang.

Von unregulären Linien, Flächen und Körpern.

§. 1.

Die Geometrie, so wohl die gemeine als die höhere, beschäftiget sich hauptsächlich mit solchen Figuren, die etwas regelmäßiges haben, oder nach einem gewissen Gesetze entstehen. Jedoch sollten billiger Weise die ganz unregulären nicht vergessen werden, wie es meistens geschiehet.

Im gegenwärtigen Anfange will ich versuchen, die Lehre von den unregulären Figuren etwas zu beleuchten. Ich trage dieselbe so vor, daß sie von einem jeden verstanden werden könne, der nur die Anfangsgründe der gemeinen Geometrie gelernet hat; auch nehme ich die Theorie der Gränzen als bekannt an, welche ich im zweiten Hauptstücke des selbstlernenden Geometers kürzlich vorgetragen habe.

Diese Betrachtung der unregulären Linien könnte vielleicht als ein bequemer Uebergang von der gemeinen zur höheren Geometrie gebrauchet werden.

§. 2.

Wenn jemand, der die Geometrie gelernet hat, die wirklichen Gegenstände der Natur betrachtet, so wird er sogleich gewahr werden, daß sie selten oder gar nicht mit den geometrischen Figuren übereinstimmen. Er wird sich also nach Grundsätzen umsehen, vermöge welcher auch unreguläre und, so zu sagen, ungeometrische Gestalten ausgemessen und verglichen werden können.

§. 3.

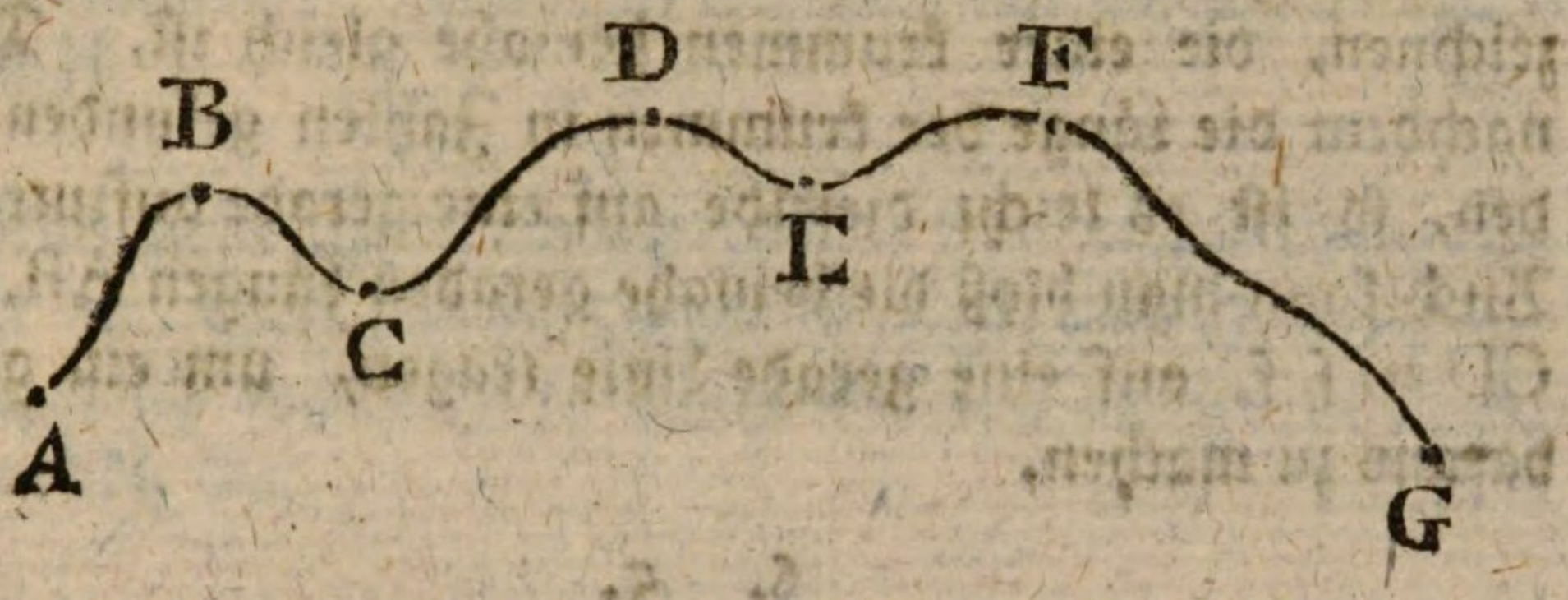
Die allgemeinste Regel, die man bei der Betrachtung krummlinichter Figuren beobachten kann, bestehet darinn, daß man sie als Gränzen der geradlinichten ansehe. Nemlich, wenn man im Umfange einer krummlinichten Figur sehr viel Punkte merket, und jeden Punkt mit dem nächstfolgenden durch eine gerade Linie verbindet, so entstehet eine geradlinichte Figur, die von der krummlinichten nicht leicht zu unterscheiden ist. Je näher nun solche Punkte neben einander genommen werden, desto mehr nähert man sich der wahren Gestalt und Größe der gegebenen Figur. Bekömmt also die geradlinichte immer mehr und mehr Seiten, so hat sie die krummlinichte zur Gränze, das heißt, die erste kann der anderen so nahe kommen, als man will, obgleich sie derselben nie völlig ähnlichgleich werden kann.

Von dieser Verwandschaft der geradlinichten und krummlinichten Figuren rühret es her, daß manche Eigenschaften und Verhältniße beiden zukommen. So wird in der gemeinen Geometrie schon gelehret, daß zwei Zirkel-Linien und auch die Umfänge der ähnlichen eingeschriebenen Vielecke sich wie die Durchmesser verhalten, weil man die Zirkel als Gränzen der eingeschriebenen Vielecke betrachten kann.

§. 4.

Aufgabe.

Eine krumme Linie messen.



Auflösung. Theile die gegebene Linie in viel kleine Stücke AB, BC, CD, DF, EF, FG die nicht viel von einer Geraden unterschieden sind. Ziehe gerade Linien von A zu B, von B zu C, u. s. f. Miß alle diese geraden Linien. Summire die gefundenen Zahlen. So ist das Aggregat nicht viel von der Länge der Länge der krummen Linie unterschieden.

Je mehr solche Theile AB, BC, u. s. f. angenommen werden, desto genauer erhält man die gesuchte Länge.

Hat man ein in Betrachtung der ganzen Länge ziemlich kleines gerades Maaß, so darf man es nur an die gegebene Linie so oft als möglich anlegen, um deren Länge ziemlich genau zu erfahren. Die kleinen Abweichungen der krummen Linie vom geraden Maaßstabe werden aus der Acht gelassen.

Hierbei ist zu merken, daß die gefundene Länge allemal etwas keiner ist als die gesuchte. Denn da man lau-

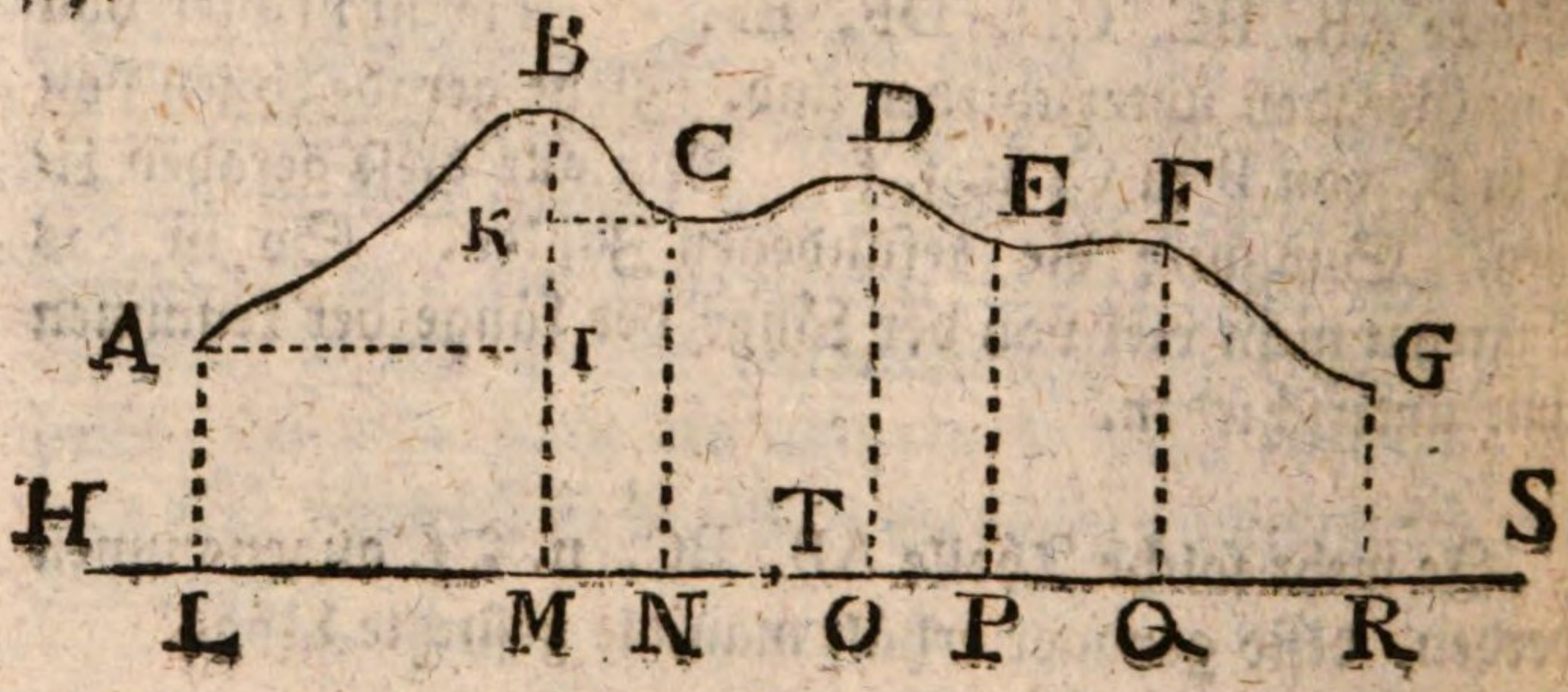
ter gerade Theile gemessen hat, so ist jeder kleiner als der darneben liegende krumme Theil, folglich ist auch die Summe der geraden Theile kleiner als die Summe der krummen.

Zusatz. Auf solche Art läßt sich eine gerade Linie zeichnen, die einer krummen beinahe gleich ist. Denn, nachdem die Länge der krummen in Zahlen gefunden worden, so ist es leicht dieselbe auf eine gerade aufzutragen. Auch kann man bloß die beinahe geraden Längen AB, BC, CD u. s. f. auf eine gerade Linie tragen, um ein ganzes daraus zu machen.

§. 5.

Aufgabe.

Eine krumme Linie zeichnen, die mit einer gegebenen entweder bloß ähnlich, oder ähnlichgleich sey.



Auflö-

Auflösung. Ziehe willkührlich die gerade HS irgend wo neben der krummen. Theile diese in einige beinahe gerade Theile AB, BC, CD, DE, EF, FG. Aus den Theilungspunkten fälle die geraden AL, BM, CN, DO, EP, FQ, GR, alle senkrecht auf HS, und folglich parallel mit einander. Merke in der Linie HS einen beliebigen Punkt H.

Nun ziehe irgendwo die gerade *hs*, wähle darin den Punkt *h*. Soll die verlangte Linie mit dem Urbilde AG ähnlichgleich werden, so mache $hl = HL$, $hm = HM$, $hn = HN$, &c.

Ueber *hs* in den Punkten *l*, *m*, *n*, &c. errichte senkrechte Linien, und mache $la = LA$, $mb = MB$, $nc = NC$, u. s. f. Durch die Punkte *a*, *b*, *c*, &c, ziehe aus freier Hand eine krumme Linie, so wird sie mit dem Urbilde beinahe ähnlichgleich seyn.

Soll die gegebene Linie sich zur abgeschriebenen verhalten wie *p* zu *q*, (z. E. wie 5 zu 3), so mache

$$\left.\begin{array}{l} HL, hl \\ HM, hm \\ HN, hn \\ \&c. \\ LA, la \\ MB, mb \\ NC, nc \\ \&c. \end{array}\right\} :: p, q$$

Alsdann wird sich AG zu *ag* verhalten beinahe wie *p* zu *q*.

Beweis. Ziehe in Gedanken die geraden Linien AB, *ab*. Ziehe AI, *ai*, parallel mit HS, *hs*, so entstehen die ähnlichen Dreiecke AIB, *aib*. Denn es ist

HL, *hl* :: HM *hm*

folglich HL, HM :: *hl*, *hm*

(HM — HL), HL :: (*hm* — *hl*), *hl*

LM, HL :: *lm*, *hl*

LM, *lm* :: HL, *hl*

LM, *lm* :: *p*, *q*

oder AI, *ai* :: *p*, *q*

Ferner, da LA, *la* :: MB, *mb*

so ist LA, MB :: *la*, *mb*

(MB — LA), LA :: (*mb* — *la*), *la*

(MB — MI), LA :: (*mb* — *mi*), *la*

IB, LA :: *ib*, *la*

IB, *ib* :: LA, *la*

IB, *ib* :: *p*, *q*

Da nun AI, *ai* / IB, *ib* } :: *p*, *q*

und $\angle I = \angle i$ (als rechte)

so ist $\triangle AIB \backsim \triangle aib$

Folglich ist auch

AB, *ab* :: *p*, *q*.

Eben

Eben so läßt sich beweisen, daß die geraden Linien

$$\left.\begin{matrix} BC,\ bc \\ CD,\ cd \\ \&c.\ \&c. \end{matrix}\right\} :: p,\ q$$

Folglich ist die Summe aller geraden Linien AB + BC + CD + &c. zur Summe $ab + bc + cd + \&c.$ wie p zu q. Die Gränzen dieser Summen sind die krummen Linien AG, ag. Da sich nun allemal die veränderlichen Größen eben so verhalten wie ihre Gränzen, so ist auch

$$AG,\ ag :: p,\ q$$

Es ist also bewiesen, daß die Längen beider Linien die verlangte Proporzion haben. Daß sie ähnlich sind, kann man folgendermaßen begreifen.

Ziehe CK, ck parallel mit HS, hs, so wird, wie vorher bewiesen, daß $\triangle CKB \backsim \triangle ckb$. Also ist

$$\angle CBK = \angle cbk$$

es war auch $\angle ABI = \angle abi$

also ist $\angle (CBK + ABI) = \angle (cbk + abi)$

oder $\angle ABC = \angle abc$

Eben so wird bewiesen, daß $\angle BCD = \angle bcd$, u.s.f. Da also die Theile AB, BC, CD, &c. mit ab, bc, cd, &c. proporzionirt sind, und die Winkel beiderseits gleich sind, so haben die geradlinichten Figuren A B C D E F G und $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ alles was zur Aehnlichkeit gehöret. Nun kann man die Aehnlichkeit krummer Linien nicht anders erkennen, als daran, daß sie die Gränzen ähnlicher geradlinichter Figuren sind. Da also die krummen Linien AG

und

und *ag* die Gränzen ähnlicher geradlinichter Figuren sind, so sind sie selbst ähnlich.

Im Beweise haben wir angenommen, daß die AG nach einem gewissen Verhältnisse verkleinert worden. Soll *ag* der AG gleich seyn, so gilt der nemliche Beweis, nur daß das Verhältniß der Gleichheit Statt findet. Es ist nemlich in diesem Falle *ab* = AB, *bc* = BC, ∠ ABC = *abc*. Also ist der Theil *abc* dem Theile ABC nicht nur gleich, sonderu auch ähnlich, und so mit den ganzen Linien *ag*, AG.

Anmerkung I. Den Punkt H, *h* kann man auch in L, *l* nehmen, wo die erste senkrechte Linie auf HS, *hs* fällt. Auch könnte man ihn irgendwo zwischen L *l* und R, *r* bestimmen. In diesem Falle aber müste man beym kopiren bemerken, welche Entfernungen, in Betrachtung des gewählten Punktes rechts oder links fallen. Würde er z. E. in T, *t* bestimmet, so müste man einerseits die Entfernungen TO, TP, TQ, TR, *to*, *tp*, *tq*, *tr*, anderseits aber die Entfernungen TN, TM, TL, *tn*, *tm*, *tl* nehmen. Sollten solche Entfernungen aufgeschrieben werden, so könnte man die einen mit + und die anderen mit — bezeichnen.

Anmerkung II. Es ist nicht nothwendig, sondern nur bloß bequem die Linien LA, MB, NC, &c. *la*, *mb*, *nc*, &c. über HS, *hs* senkrecht zu errichten. Es ist genug, daß sie alle dielbe Neigung gegen HS, *hs* haben, oder mit derselben gleiche Winkel machen.

§. 6.

In der vorhergehenden Aufgabe wurde stillschweigend angenommen, daß die krumme Linie, welche abgebildet werden soll, ganz in einer Ebne lieget, oder liegen kann. Eine solche Linie wird eine einfach gekrümmte Linie genannt. Es giebt aber auch Linien, die sich so krümmen,

daß

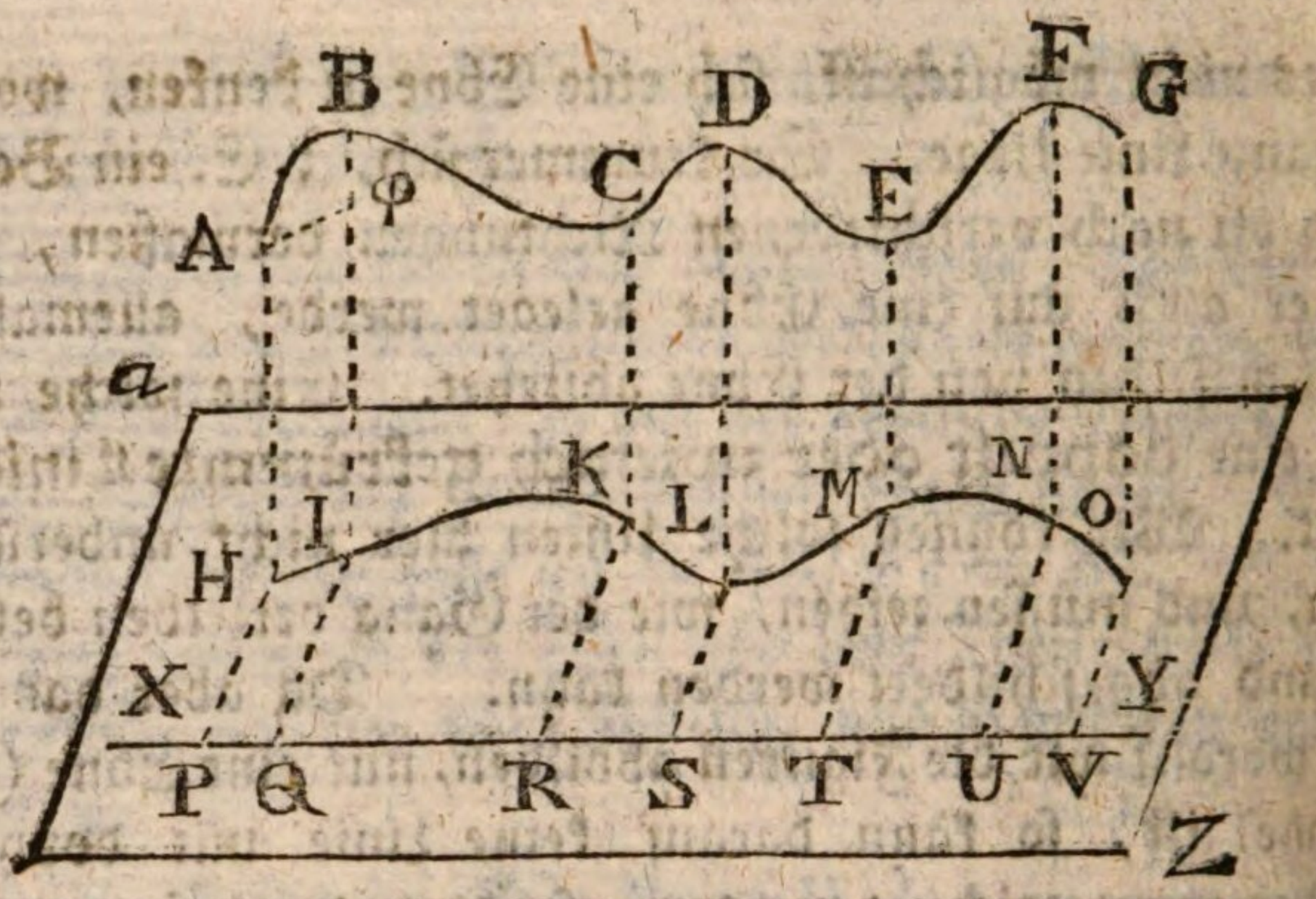
daß es nicht möglich ist, sich eine Ebne zu denken, worinn die ganze Linie liege. So krümmet sich, z. E. ein Baumzweig oft nach verschiedenen Richtungen dermaßen, daß, wie er auch auf eine Ebne geleget werde, allemal ein Theil desselben von der Ebne abstehet. Eine solche Linie wird eine doppelt oder zwiefach gekrümmte Linie genannt. Wir können solche Linien hier nicht unberühret lassen, und müssen zeigen, wie der Gang derselben bestimmet und abgeschildert werden kann. Da aber das Papier, worauf wir die Figuren abbilden, nur eine Ebne (oder beinahe) ist, so kann darauf keine Linie mit doppelter Krümmung gezeichnet werden, sondern der Leser muß die Einbildungskraft zur Hülfe nehmen.

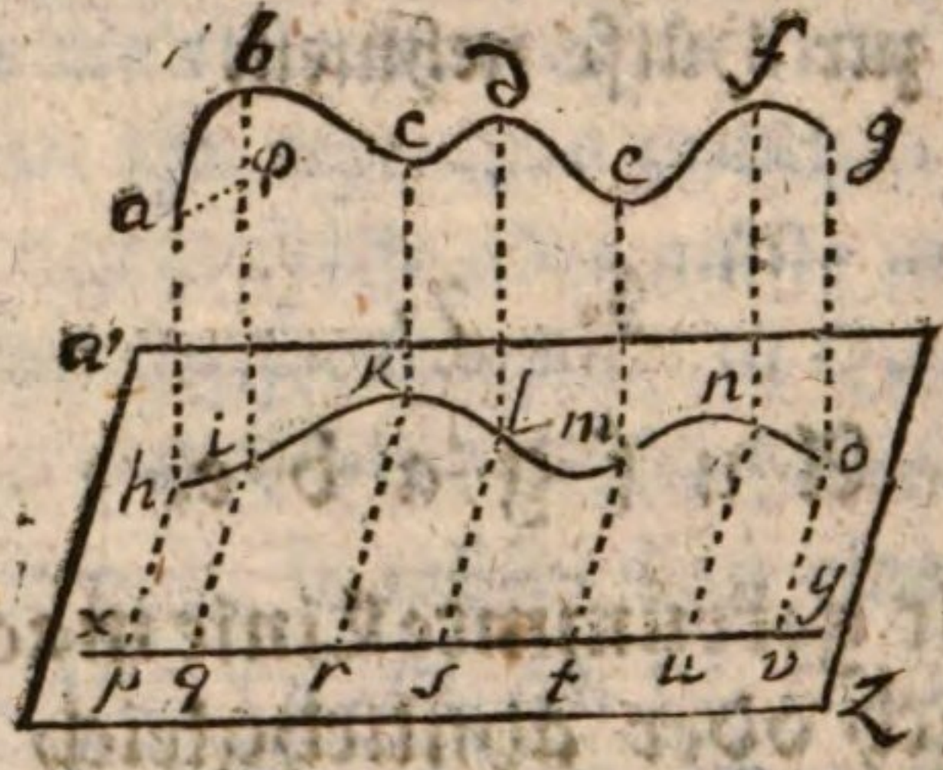
§. 7.

Aufgabe.

Eine doppelt gekrümmte Linie machen, die einer gegebenen ähnlich oder ähnlichgleich sey.

(Siehe folgende Figuren.)





Auflösung. Es sey AG eine doppelt gekrümmte Linie, die man sich irgendwo in der Luft befestiget vorstellen muß. Z*a* sey eine Ebne unter derselben. Theile die krumme Linie in beinahe gerade Theile ein, vermöge der Punkte A, B, C, D, E, F, G.

Aus jedem dieser Punkte fälle auf die Ebne Z*a* senkrechte Linien AH, BI, CK, DL, EM, FN, GO.

So werden die Punkte H, I, K, L, M, N, O auf der Ebne eine einfach gekrümmte Linie HO abbilden.

Ziehe auf die Ebne die willkührliche gerade Linie XY.

Aus den Punkten H, I, K, L, M, N, O fälle auf XY senkrechte Linien HP, IQ, KR, LS, MT, NU, OV.

Wähle

Wähle in der Linie XY den willkührlichen Punkt X.

Auf einer anderen Ebne za' ziehe xy, und wähle den Punkt x. Um den Beweis zu erleichtern, wollen wir annehmen, es solle sich die Linie AG zur verlangten ag verhalten wie 1 zu n, so daß $a..g = n(A..G)$. Dieses n kann entweder 1, oder mehr als 1 oder weniger als 1, seyn.

Mache demnach xp, xq, xr, u. s. f. jede n mal so groß als XP, XQ, XR, &c.

Errichte ph, qi, rk, &c. senkrecht auf xy, und mache diese Linien n mal so groß als PH, QI, RK, &c.

So entstehet die einfach gekrümmte Linie ho, welche der HO ähnlich ist, und worin jeder Theil hi, n mal so groß ist als HI.

Ueber der Ebne za', in den Punkten h, i, k, &c. errichte ha, ib, kc, &c. senkrecht, und mache diese Linien $n$mal so groß als HA, IB, KC, &c.

So wird die Linie ag, die durch die Punkte a, b, c, &c. gehet, mit der Linie AG ähnlich seyn, und diese wird sich zu jener verhalten, wie 1 zu n.

Beweis. Anstatt der Theile der krummen Linien ziehe in Gedanken lauter gerade Linien, wie im 5ten §. geschehen ist. Ziehe $A\varphi$ und $a\varphi$ mit HI und hi parallel, so ist $A\varphi = HI$ und $a\varphi = hi$. Es ist auch $AH = I\varphi$ und $ah = i\varphi$. In φ und φ sind rechte Winkel, weil in I und i welche sind.

Nun ist $bi = n\,(BI)$

$ah = n\,(AH)$

folglich $bi - ah = n\,(BI - AH)$

oder $bi - i\varphi = n\,(BI - I\varphi)$

oder $b\varphi = n\,(B\varphi)$

Da

Da nun, wie vorher bemerket worden,

$$a\varphi = n(A\varphi)$$

und da $b\varphi = n(B\varphi)$

da auch $\angle \Phi = \angle \varphi$ (als rechte)

so ist $\triangle A\varphi B \backsim \triangle a\varphi b$

folglich ist auch $ab = n(AB)$. Das nemliche kann von allen zustimmenden Theilen beider Linien ag, AG bewiesen werden. Also ist $ag = n(AG)$, und dieses gilt sowohl von den Systemen gerader Linien, die wir uns eingebildet haben, als von deren Gränzen, nemlich beiden krummen Linien.

Was die Krümmung oder Wendung der verschiedenen Theile betrift, so ist sie beiderseits einerlei. Denn erstlich bilden die Theile HI mit IK, und hi mit ik gleiche Winkel (§. 5.), folglich haben die Ebnen AI mit IC und ai mit ic gleiche Neigung gegen einander. Eben so wird bewiesen, daß die Ebnen IC mit CL und ic mit cl gleiche Neigung haben, u. s. f. Was also die Krümmung der Linien AG und ag vorwärts und rückwärts betrift, so ist sie einerlei.

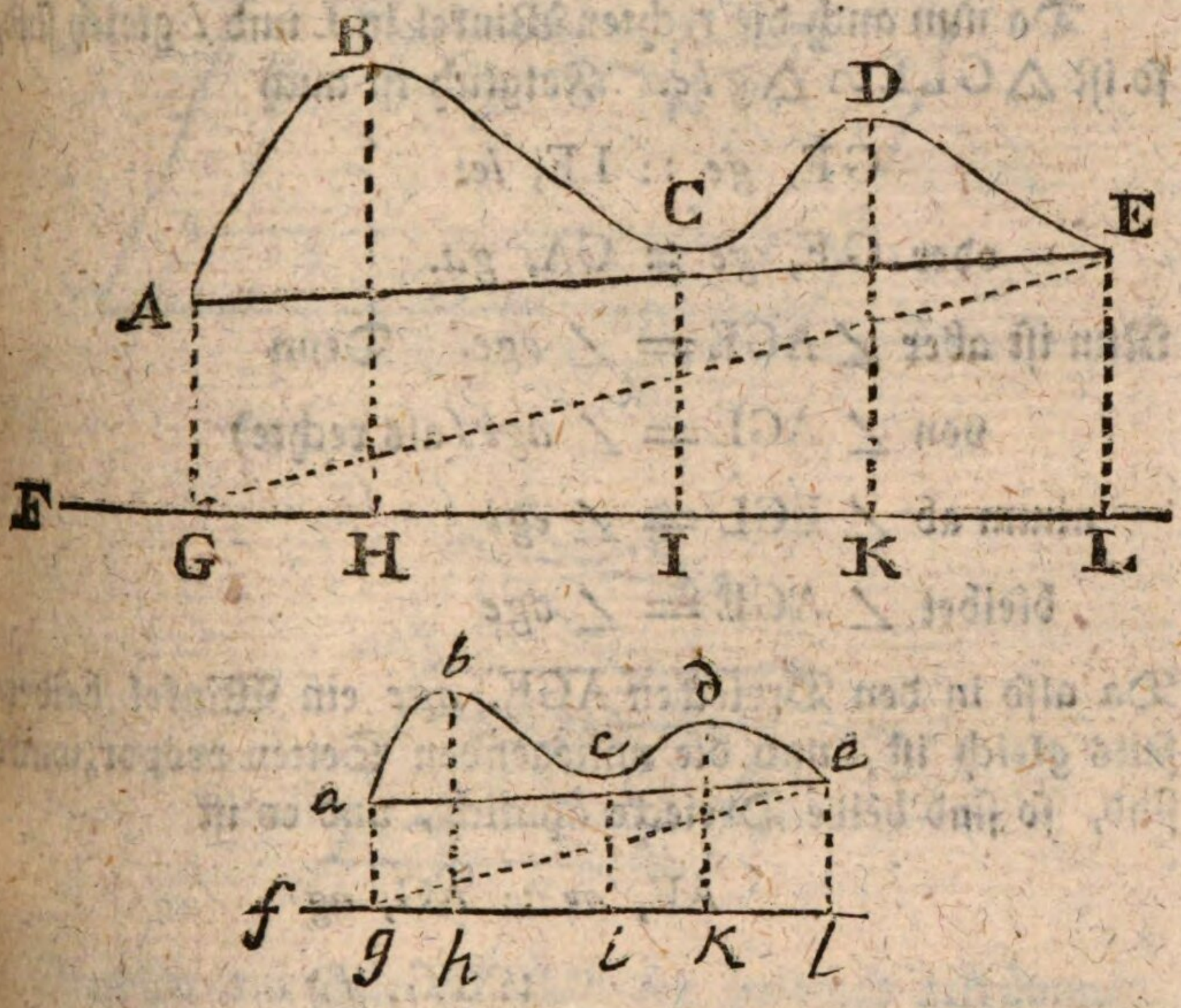
Ferner ist in den ähnlichen Dreiecken $A\varphi B$, $a\varphi B$, der Winkel $BA\varphi$ dem Winkel $ba\varphi$ gleich. Also haben die Theile AB, ab, gegen $A\varphi$, $a\varphi$, oder gegen deren parallelen HI, hi, oder gegen die Ebnen $Z\,a$, $z\,a'$ einerlei Neigung. Eben so wird von den übrigen Theilen BC, bc. u. s. f. bewiesen, daß sie gegen die Ebnen $Z\,a$, $z\,a'$ einerlei Neigung haben. Was also die Krümmung der Linien AG, ag, oberwärts und unterwärts, oder gegen die Ebne, ab und zu, betrift, so ist sie auch einerlei.

Da also die geraden Theile beider Systeme proportioniret sind, und sich auf gleiche Art wenden, oder ihre Rich-

Richtnng verändern, so sind beide Linien-Systeme ähnlich. Folglich sind deren Gränzen, die krummen Linien, auch ähnlich.

§. 8.

Aehnliche krumme Linien verhalten sich wie die geraden Linien die ihre Enden verbinden.



Gesezt, die einfach gekrümmten Linien A B C D E, *a b c d e* seyen ähnlich, so kann man annehmen, es sey *a b c d e* eine Abbildung der A B C D E, und diese Abbildung sey nach § 5 gemacht worden, nemlich vermittelst vieler proporzionirter gerader Linien, so daß *fg*, FG :: *fl*, FL :: *ga*, GA :: *le*, LE. Es seyen die Enden jeder krummen Linie durch die geraden *ae*, AE verbunden. Es werde gezogen *ge* und GE.

Weil FG, *fg* :: FL, *fl*

so ist FG, FL :: *fg*, *fl*

(FL — FG), FG :: (*fl* — *fg*), *fg*

GL, FG :: *gl*, *fg*.

GL, *gl* :: FG, *fg*.

GL, *gl* :: LE, *le*.

Da nun auch die rechten Winkel in L und *l* gleich sind, so ist △ GLE ∽ △ *gle*. Folglich ist auch

GE, *ge* :: LE, *le*.

oder GE, *ge* :: GA, *ga*.

Nun ist aber ∠ AGE = ∠ *age*. Denn

von ∠ AGL = ∠ *agl* (als rechte)

nimm ab ∠ EGL = ∠ *egl*

bleibet ∠ AGE = ∠ *age*

Da also in den Dreiecken AGE, *age* ein Winkel beiderseits gleich ist, und die anliegenden Seiten proporzionirt sind, so sind beide Dreiecke ähnlich, und es ist

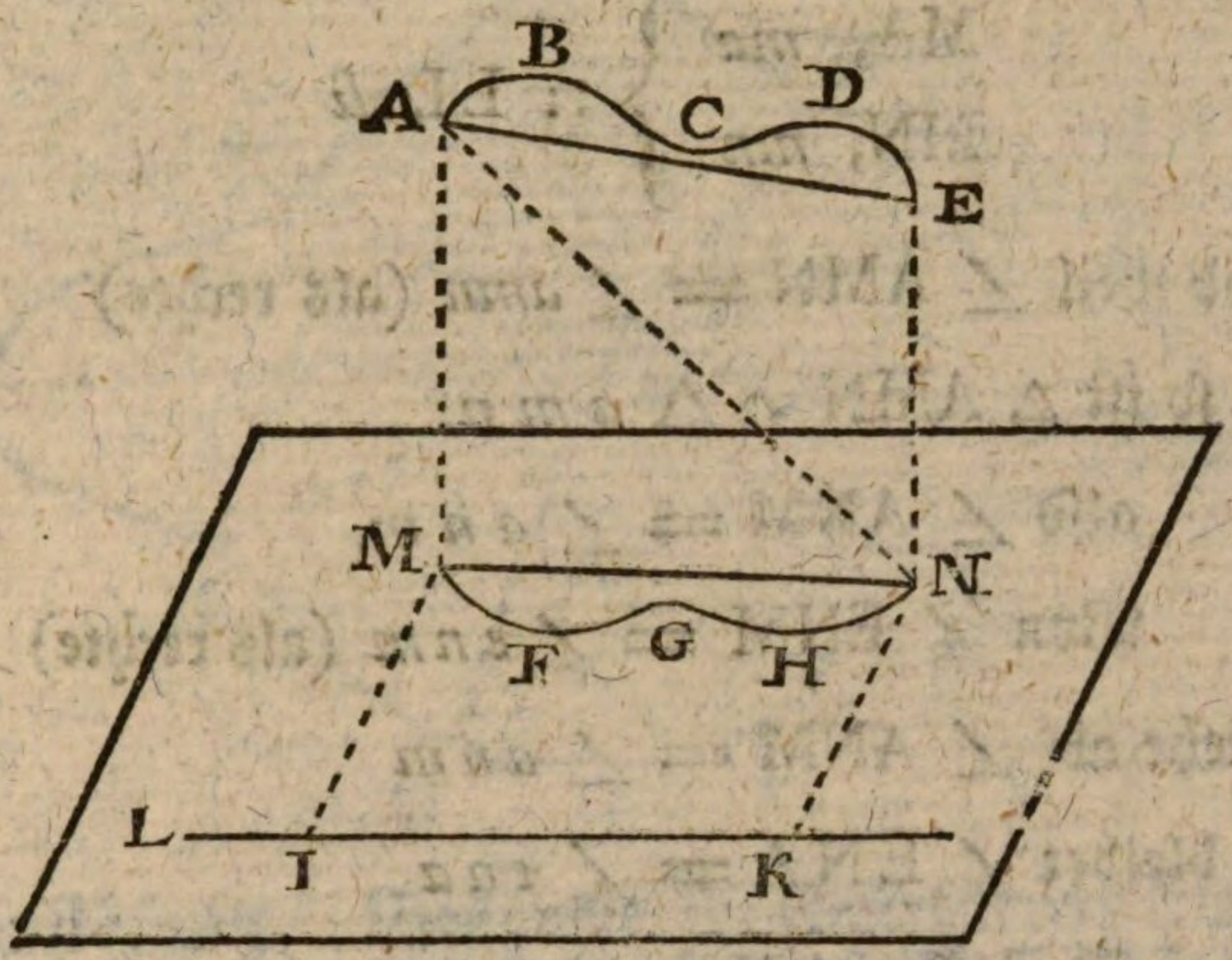
AE, *ae* :: AG, *ag*

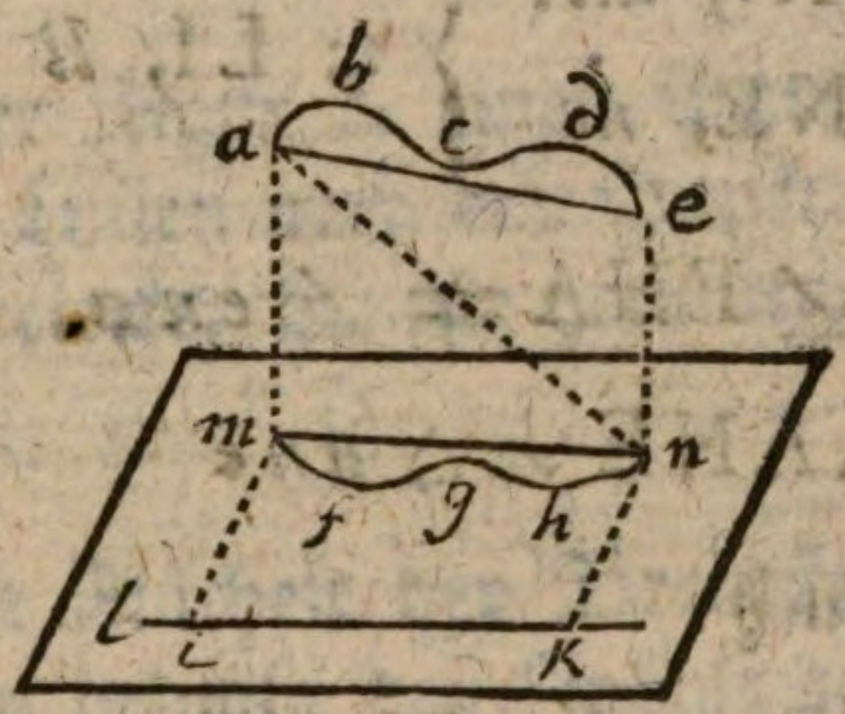
:: FG, *fg*

:: ABCDE, *abcde* (§ 5)

Sind beide Linien von zwiefacher Krümmung, so wird der nemliche Beweis zweimal angebracht

(Siehe die fogenden Figuren.)





Gesetzet die Linie ABCDE sey zwiefach gekrümmet, und die Linie *abcde* sey derselben ähnlich gemacht worden (§ 7). Es seyen MFGHN, *mfghn* die ähnlichen Projekzionslinien, deren Lage durch die geraden LI, LK, IM, KN, *li*, *lk*, *im*, *kn* bestimmet wird.

Ziehe MN, *mn*, und beweise wie vorher daß MN, *mn* :: LI, *li*.

Ziehe AE, *ae*, AN, *an*, und denke dir eine Ebne worinn die Linien MN, MA, NE, AE, AN liegen, desgleichen eine Ebne worinn die Linien *mn*, *ma*, *ne*, *ae*, *an* sind.

Weil

$$\left.\begin{matrix} MA,\ ma \\ MN,\ mn \end{matrix}\right\} :: LI,\ li$$

und weil $\angle AMN = \angle amn$ (als rechte)

so ist $\triangle AMN \sim \triangle amn$

also $\angle ANM = \angle anm$.

Von $\angle ENM = \angle enm$ (als rechte)

ziehe ab $\angle ANM = \angle anm$

so bleibet $\angle ENA = \angle ena$

Da in den Dreiecken ANE und *ane*

$$\left.\begin{matrix} AN,\ an: \\ NE,\ ne \end{matrix}\right\} :: LI,\ li$$

und $\angle ENA = \angle ena$.

so ist $\triangle ANE \sim \triangle ane$

folglich ist auch

$$AE,\ ae :: LI,\ li$$

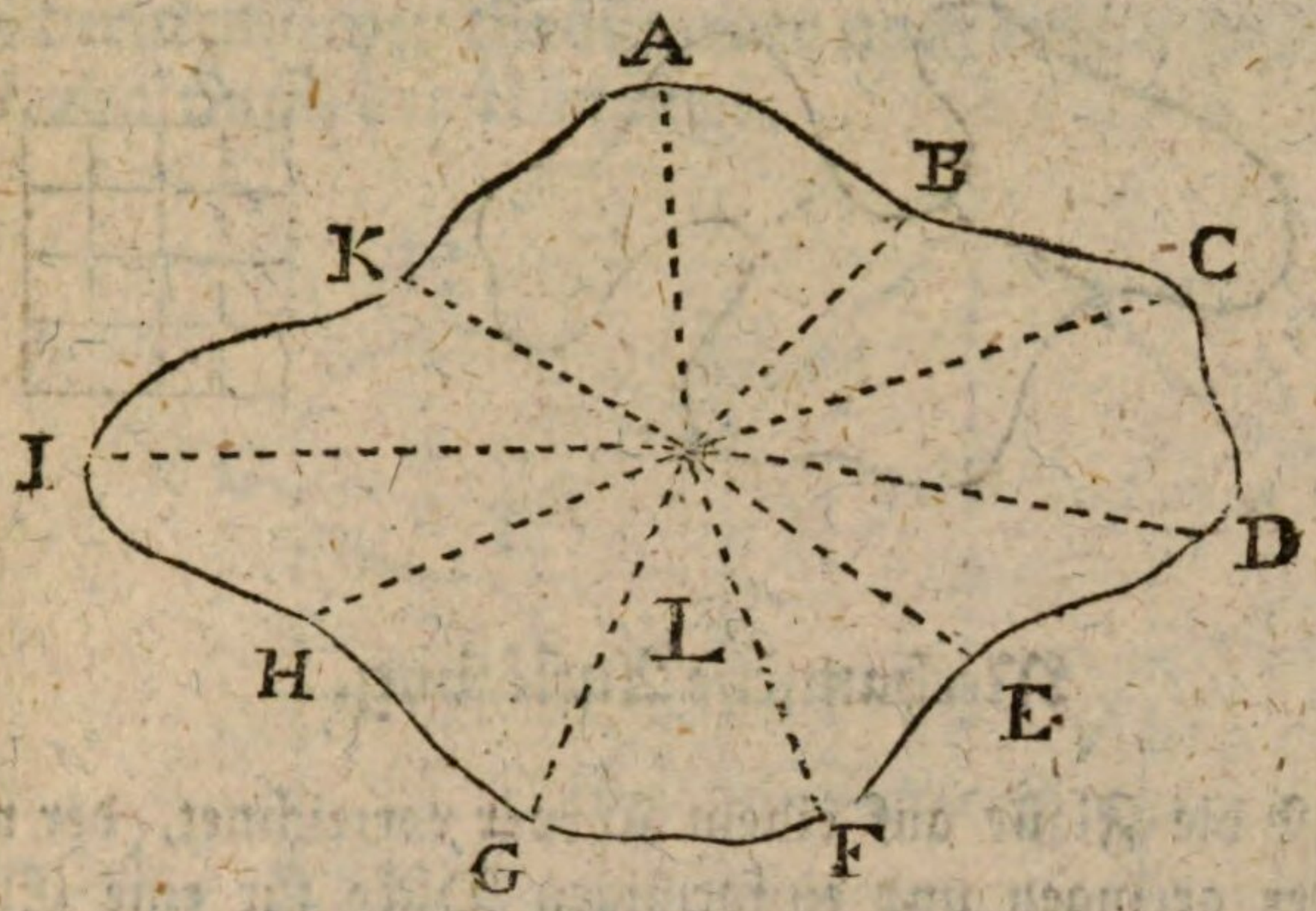
oder $AE,\ ae :: ABCDE,\ abcde$ (§ 7.)

§. 9.

Aufgabe.

Eine krummlinichte Ebne berechnen.

(Siehe die folgende Figur.)



Auflösung. Bestimme im Umkreise der Figur verschiedene Punkte A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, so daß derselbe in beinahe gerade Theile eingetheilet sey.

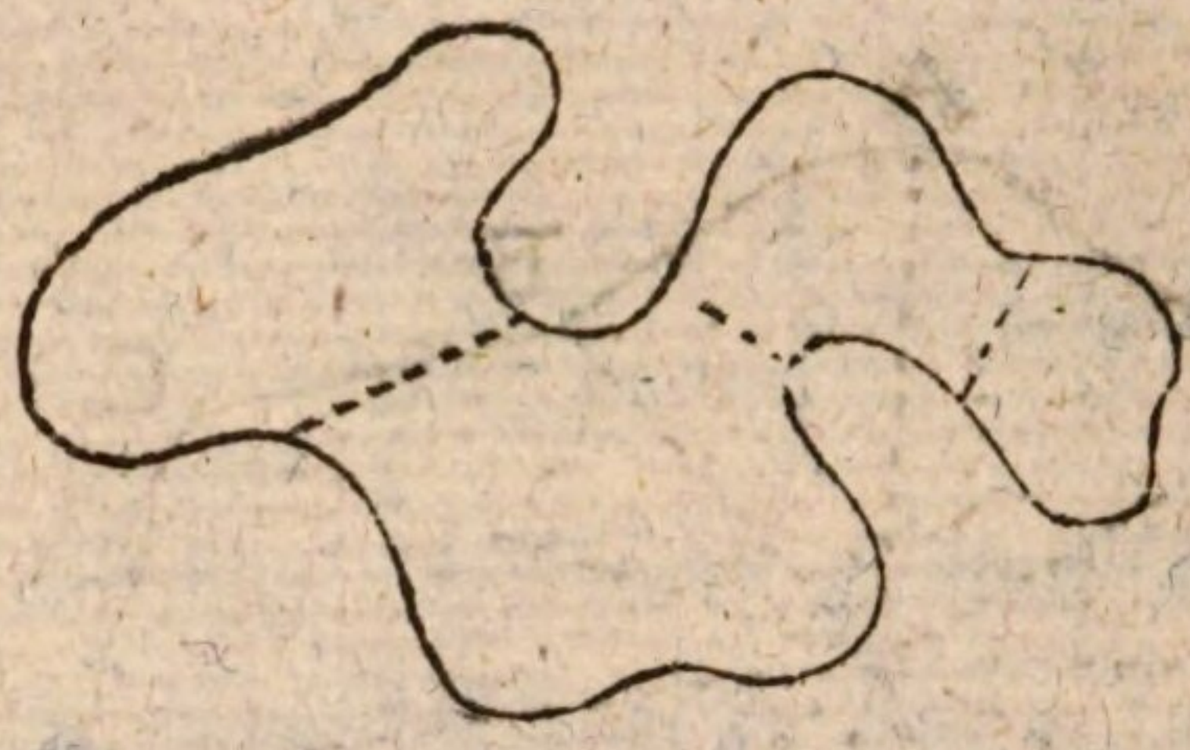
Wähle in der Figur L einen Punkt, und ziehe aus demselben gerade Linien nach den Punkten des Umkreises. So entstehen Dreiecke, die für geradlinicht gehalten werden können.

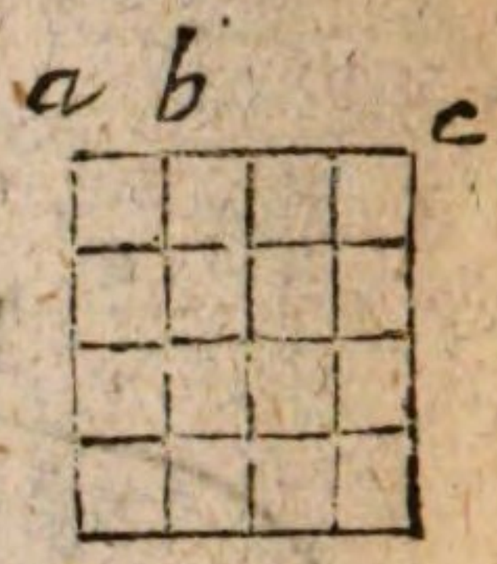
Berechne die Flächen der Dreiecke, und addire dieselben, so hast du beinahe den Inhalt der krummlinichten Ebne.

Hat die Figur gar zu starke Krümmungen, so daß sie sich nicht bequem in Dreiecke eintheilen läßt, so zerstücke sie erstlich in einige größere Theile, deren jeder für sich in Dreiecke eingetheilet und berechnet werden kann. Summire zulezt die Theile.

Z. E Folgende krummlinichte Figur kann anfänglich in 4 Stücke, und ferner jedes Stück in mehrere Dreiecke getheilet werden.

(Siehe die folgende Figur.)





Mechanische Auflösung.

Ist die Figur auf einem Körper verzeichnet, der wegen der geringen und einförmigen Dicke für eine Ebne gelten kann, z. E. auf Papier, so kann man auch durch das Gewicht den Flächen-Inhalt finden.

Gesetzet die Figur sey auf dem Papier nach einem gewissen Maaßstabe gezeichnet, auf welchem *ab* eine Ruthe gilt. So nimm ein Stück vom nemlichen Papiere, ziehe darauf *ac*, einige Ruthen lang, z. E. 4 Ruthen. Ueber dieser Grundlinie beschreibe ein Quadrat, so ist dessen Fläche = 16 Quadrat-Ruthen.

Schneide dieses Quadrat aus, wie auch die gegebene Figur. Wäge beide auf einer genauen Waage.

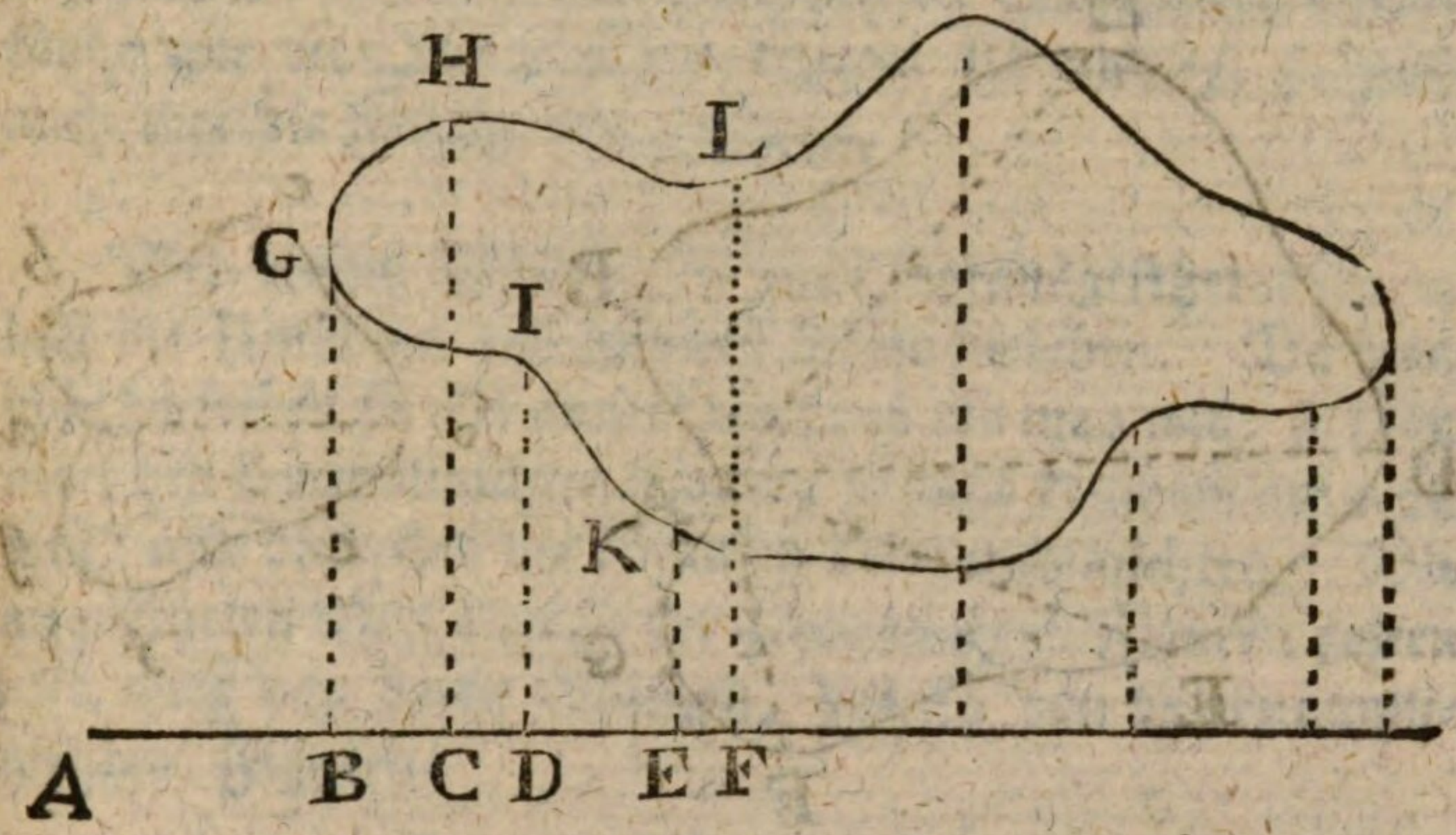
Sage, vermöge der Regeldetri: Wie sich das Gewicht des Quadrats zum Gewichte der anderen Figur verhält, so verhalten sich 16 Ruthen, zur Fläche der gegebenen Figur.

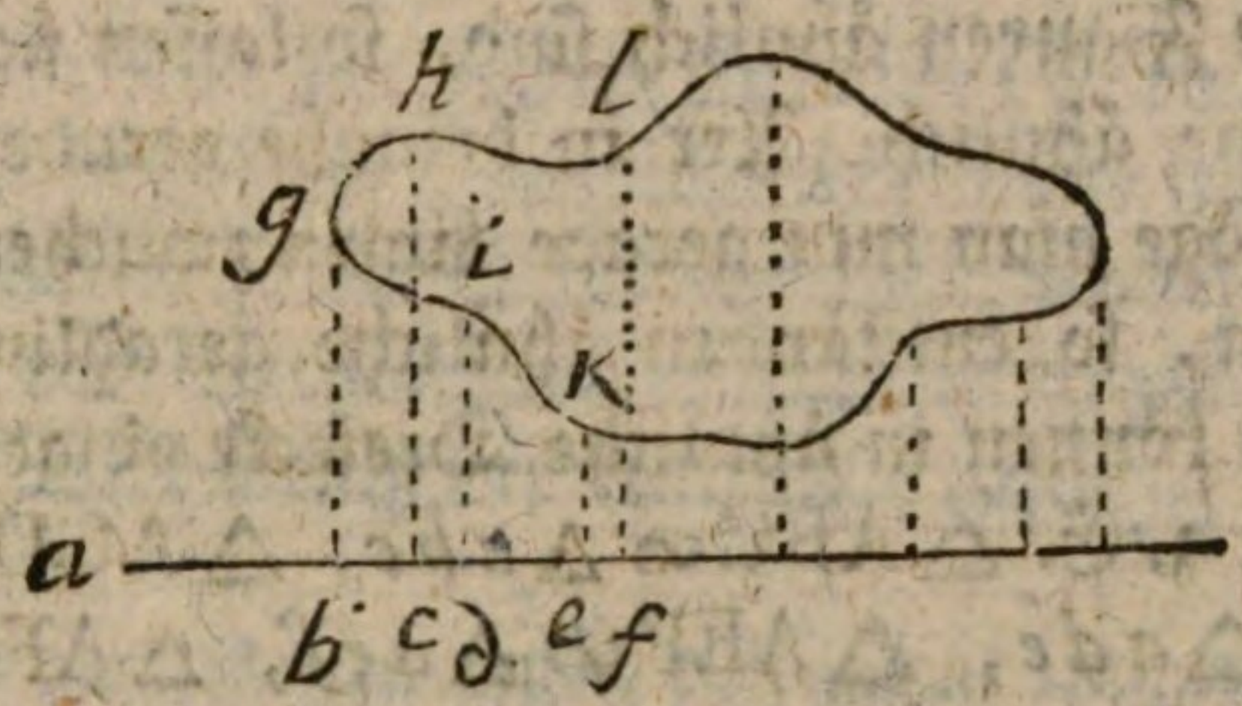
§. 10.

Aufgabe.

Eine krummlinichte Ebne abzeichnen, entweder

in der nemlichen Größe oder nach einem gegebenen Verhältnisse der Umfänge.





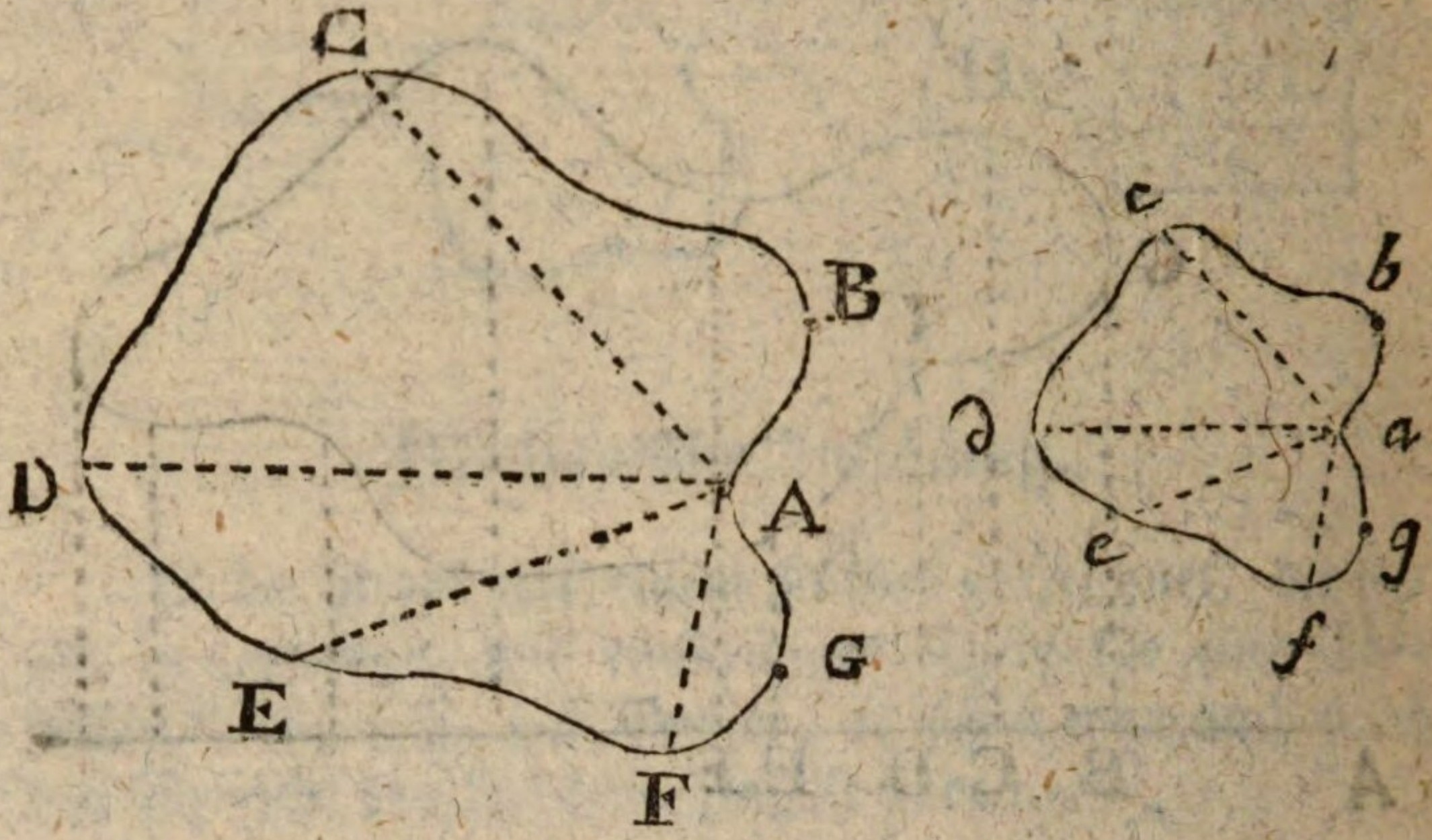
Auflösung. Zeichne den Umkreis der Figur ab, wie §. 5. gelehret worden. Soll nun die zweite Figur der ersten ähnlichgleich werden, so wird gemachet $ab = AB$, $ac = AC$, $ad = AD$, $ae = AE$, $af = AF$, $bg = BC$, $ch = CH$, $di = DI$, $ek = EK$, $fl = FL$, &c. &c.

Soll der Umfang der zweiten Figur nach einem gewissen Verhältnisse vergrößert oder verkleinert seyn, so müssen ab zu AB, bg zu BG, u. s. f. sich verhalten wie der zweite Umfang sich zum ersten verhalten soll.

§. 11.

Aehnliche krummlinichte Ebnen verhalten sich, was die Flächen betrift, gegen einander, wie die Quadrate der

in ihnen ähnlich gezogenen geraden Linien, oder wie die Quadrate der Umfänge.



Weil die Figuren ähnlich sind, so lassen sich ihre Umkreise auf eine ähnliche Art in beinahe gerade Theile eintheilen. Zöge man nun gerade Linien zwischen den Theilungspunkten, so entständen ähnliche geradlinichte Figuren. Diese können in ähnliche Dreiecke eingetheilet werden, so daß z. E. △ABC ∽ △*abc*, △ACD ∽ △*acd*, △ADE ∽ △*ade*, △AEF ∽ △*aef*, △AFG ∽ △*afg*.

Es seien nun AE und *ae* zwei in beiden Figuren ähnlich gezogene gerade Linien, so kann man sich allemal vorstellen, daß sie homologe Seiten zweier ähnlicher Dreiecke AEF und *aef* sind. Es verhält sich demnach AE zu *ae*, wie EF zu *ef*. Folglich verhält sich auch das Quadrat der AE zum Quadrat der *ae*, wie das Quadrat der EF zum Quadrate der *ef*.

Die erste Figur verhält sich zur zweiten, wie das Quadrat der Seite EF zum Quadrat der homologen Seite *ef*, folglich auch wie das Quadrat der EA zum Quadrate der *ea*; das ist, die Flächen verhalten sich wie die Quadrate der ähnlich gezogenen Linien AE und *ae*.

Fer-

Ferner verhält sich der Umfang ABCDEFGA zum Umfange *abcdefga*, wie die eine Seite EF zur homologen Seite *ef*, also verhalten sich die Quadrate der Umfänge wie die Quadrate der Seiten EF und *ef*, folglich auch wie die Flächen der Figuren.

Bei diesem Beweise ist zwar vorausgesetzet worden, daß die Umfänge aus geraden Linien bestehen. Da man aber derselben so viel annehmen kann als man will, so kann man den krummlinichten Figuren so nahe kommen als man will, und diese sind die Gränzen der geradlinichten. Die angeführten Verhältnisse der geradlinichten Figuren gelten also auch von deren Gränzen, das ist, von den krummlinichten Figuren.

Zusatz. Bei der lezten Aufgabe (§. 10.) wurde angenommen, daß eine krummlinichte Ebne nach einem gewissen Verhältnisse der Umfänge abgezeichnet werden soll. Wäre aber das Verhältniß der Flächen gegeben, so müßte erstlich das Verhältniß der Umfänge gesuchet werden.

Gesetzet die Flächen sollen sich gegen einander verhalten wie m zu n, so ist das Verhältniß der Umfänge wie $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{n}$. Denn, wenn sich die Umfänge verhalten wie $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{n}$, so verhalten sich, vermöge des gegenwärtigen Satzes, die Flächen wie $(\sqrt{m})^2$ zu $(\sqrt{n})^2$, das ist, wie m zu n. Wenn z. E. die Flächen sich verhalten sollen wie 3 zu 5, so müssen sich die Umfänge verhalten wie $\sqrt{3}$ zu $\sqrt{5}$, das ist, beinahe wie 1;732 zu 2;236 oder wie 1732 zu 2236, oder wenn es nur auf ein Ohngefähr ankömmt, wie 17 zu 22.

§. 12.

Aufgabe.

Eine krumme Fläche berechnen.

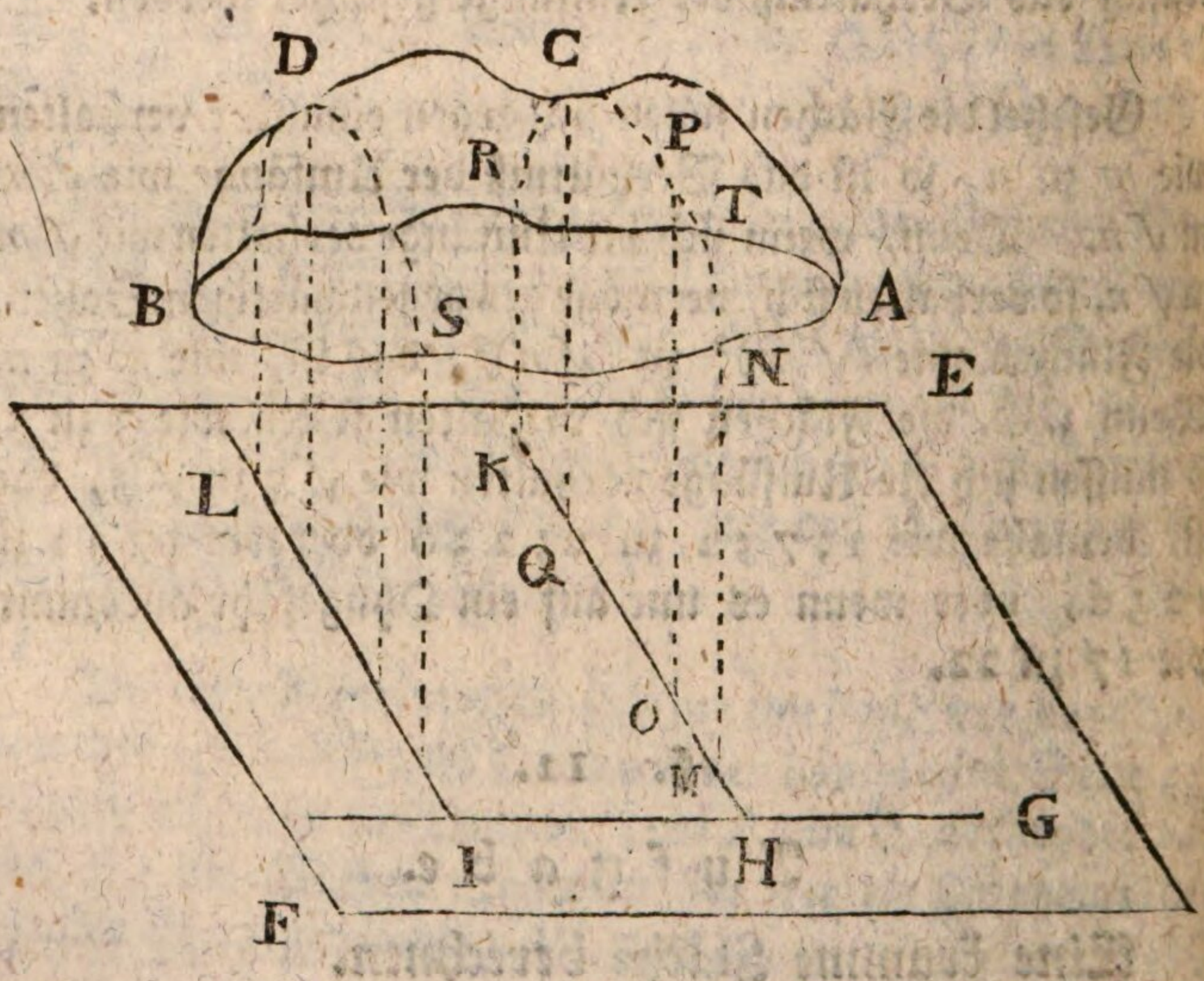
Auflösung. So verschiedene Krümmungen die Fläche immer haben mag, so läßt sie sich doch allemal in kleine Theile eintheilen, die für Ebnen gelten können. Man berechne demnach alle diese Ebnen, und mache die Summe derselben. Diese wird nicht viel von der wahren Größe der krnmmen Fläche verschieden seyn.

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, so sey die Fläche eines höckrichen Berges auszurechnen. Man theile diese Fläche in kleine beinache geradlinichte und ebene Dreiecke oder Parallelogrammen ein, so wird deren Summe beinahe die ganze Oberfläche des Berges geben.

§. 13.

Aufgabe.

Eine krumme Fläche abzeichnen, entweder in gleicher Größe, oder nach einem gegebenen Verhältnisse der Umfänge.



Auflö-

Auflösung. Es sey ACDBA eine krumme Fläche, die ohngefähr einer Kappe oder Mütze ähnlich ist.

Lege unter derselben die Ebne EF.

Auf der Ebne ziehe willkürlich die gerade Linie GI.

In der Ebne errichte einige gerade Linien senkrecht auf GI, wie HK, IL.

Ueber HK, IL errichte einige gerade Linien MN, OP, QC, KR senkrecht auf der Ebne, bis sie der krummen Fläche begegnen.

In der geraden GI bestimme willkürlich den Punkt G.

Soll nun eine krumme Fläche der gegebenen ähnlich-gleich gemachet werden, so ist weiter nichts zu thun, als daß man auf einer anderen Ebne die geraden Linien eben so bestimme, wie sie in der gegebenen Figur gezogen worden.

Es wird nemlich wiederum die willkürliche GI gezogen, und auf derselben der Punkt G bestimmet. Auf dieser Linie trägt man die Längen GH, GI. Man ziehet wie vorher HK, IL in der Ebne, senkrecht auf GI. Auf HI trägt man die Entfernungen HM, HO, HQ, HK. An den Enden derselben errichtet man die geraden MN, OP, QC, KR, senkrecht auf der Ebne, und giebt ihnen die nemlichen Längen. So sind die Punkte N, P, C, R der krummen Fläche bestimmet. Verfähret man eben so bei IL, so hat man wiederum einige Punkte der krummen Fläche.

Je näher nun die Linien HK, IL, wie auch die Linien MN, OP, QC, KR gezogen werden, desto mehr Punkte werden bestimmet. An den obersten Enden dieser lezten Linien kann man nun eine Fläche legen, die beinahe die nem-

nemlichen Krümmungen haben wird als die gegebene Fläche.

Will man aber die gegebene Fläche nach einem gewissen Verhältnisse der Umfänge verkleinern oder vergrößern, so müssen alle Entfernungen GH, GI, HM, HO, &c. nach demselben Verhältnisse verkleinert oder vergrößert werden.

Werden z. E. die Hälften der Entfernungen GH, GI &c. genommen, so wird auch der Theil NS des Randes oder Umfanges auf die Hälfte verkleinert. Da nun das nemliche von allen Theilen des Randes gilt, so wird der ganze Rand halb so groß als er war.

§. 14.

Die Umfänge ähnlicher krummer Flächen verhalten sich wie die auf ähnliche Art in ihnen gezogene geraden oder krummen Linien.

Siehe die vorhergehende Figur.

Gesetzet es würde die krumme Fläche ACDBA verkleinert, so daß der Umfang AB nur halb so groß würde, so würde auch die krumme Linie NPCR nur halb so groß als sie jezt ist, weil die Entfernungen HM, HO, HQ, HK halbiret wären (§. 13.). Und solche Bewandniß hat es auch mit jedem anderen Verhältnisse.

Zöge man von N zu R eine gerade Linie, so würde sie nach dem nemlichen Verhältnisse wie die krumme NPCR ab- oder zunehmen, also auch nach dem nemlichen Verhältnisse wie der Umfang AB. Das nemliche gilt von einer geraden Linie, die von N nach C, von P nach C u. s. f. gezogen würde. Da nun die Richtung der krummen NPCR

will-

willkürlich ist, und von der angenommenen Lage der geraden GI abhänget, so kann jede in der krummen Fläche gezogene Linie als eine solche betrachtet werden welche die Enden einer in der nemlichen Fläche gezogenen krummen Linie verbindet. Folglich nimmt sie allemal im nemlichen Verhältnisse zu oder ab, wie die krumme selbst, und wie der Umfang der krummen Fläche.

§. 15.

Aehnliche krumme Flächen verhalten sich gegen einander wie die Quadrate ihrer Umfänge, oder wie die Quadrate der in ihnen ähnlich gezogenen geraden Linien.

(Siehe die vorhergehende Figur bei §. 13.)

Gesetzt es sei NCDSN ein Theil der krummen Fläche, der für eine geradlinichte Ebne gehalten werden könne. Nimmt der Umfang AB der krummen Fläche nach einem gewissen Verhältnisse ab, so nehmen auch die Linien NS, NC, CD, DS nach dem nemlichen Verhältnisse ab (§. 13.).

Die Figur NCDSN bleibt also sich selbst ähnlich, und folglich nimmt sie ab, nach dem Verhältnisse des Quadrates der Seite SN, folglich auch nach dem Verhältniße des Umfanges AB, oder nach dem Verhältniße jeder auf eine gewisse Art in der krummen Fläche gezogenen geraden Linie. Die Gleichheit dieser Verhältniße ist schon aus dem vorhergehenden hinlänglich bekannt.

Da nun jeder beinahe gerade Theil der krummen Fläche nach diesen Verhältnißen abnimmt, so nimmt auch die ganze Fläche nach den nemlichen Verhältnißen ab.

Zusatz. Soll also eine krumme Fläche sich zur anderen verhalten wie m zu n, so müssen die Umfänge sich

ver-

verhalten $\sqrt{m}$ zu $\sqrt{n}$, und die bestimmenden geraden Linien GH, GI, HM, MO, u. s. f. müssen nach diesem Verhältnisse vergrößert oder verkleinert werden.

§. 16.

Aufgabe.

Den körperlichen Inhalt eines unregulären Körpers berechnen.

Auflösung. Man theile die Oberfläche des Körpers in Theile die entweder wirkliche geradlinichte Ebnen sind, oder dafür angesehen werden können.

Man nehme im Körper einem willkührlichen Punkt an.

Man stelle sich vor, der Körper bestehe aus lauter Pyramiden welche die auswendigen Ebnen zu Grundflächen und den gewählten Punkt zum Scheitelpunkt haben.

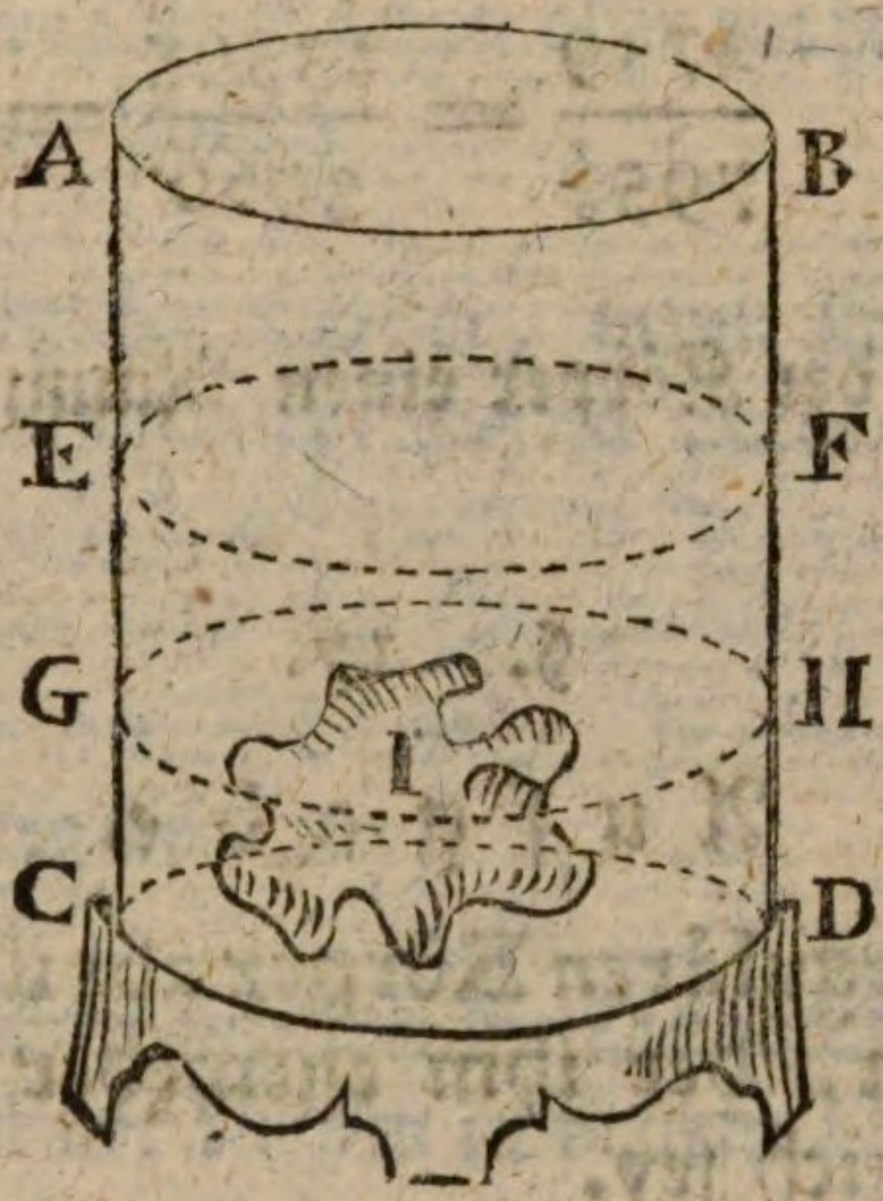
Man berechne alle diese Pyramiden und summire dieselben, so bekömmt man entweder genau oder beinahe den körperlichen Inhalt, nachdem die auswendigen Flächen wirklich oder nur beinahe geradlinichte Ebnen sind.

Da aber dieses Verfahren viele Schwierigkeiten machet, und wenn der Körper nicht hohl, sondern inwendig dicht ist, gar nicht gebrauchet werden kann, so bediene man sich lieber folgender mechanischer Auflösung.

Mechanische Auflösung.

Man lege den Körper in ein Gefäß von einer solchen Gestalt, daß sich dessen körperlicher Inhalt leicht berechnen lassen, z. E. in ein Gefäß das die Gestalt eines Parallelepi-

epipedons oder eines Zylinders habe. Man gieße in daſſelbe Waſſer, bis der Körper ganz davon bedecket iſt, und merke an der inwendigen Wand wie hoch es ſtehet. Man nehme nun den Körper heraus, und merke wiederum wie hoch das Waſſer ſtehet. Nun berechne man den leeren Raum, der im Gefäße nach der Wegnehmung des Körpers entſtanden iſt, als wenn es ein feſter Körper wäre. Der gefundene Inhalt dieſes Raumes iſt dem Raume gleich den der Körper eingenommen hat, und folglich dem Inhalt deſſelben.



Geſezt das Gefäß ABDC ſei zylindriſch. Das Waſſer habe über dem Körper I bis EF geſtanden, und ſei, nachdem der Körper I herausgenommen, bis in GH gefallen, ſo brauchet man nur die Scheibe EFHG des Zylinders auszurechnen, um den Inhalt des Körpers zu finden. Dieſes bedarf keines Beweiſes.

Uebrigens kann man anſtatt Waſſer jede andere flüſſige oder wenig zuſammenhängende Materie gebrauchen, als z. B. Sand.

Anders. Wenn der Körper ganz von einerlei Materie iſt, ſo wäge eine beſtimmte Quantität dieſer Materie,

rie, z. E. einen Kubikfuß, und sage hernach; wie das Gewicht eines Kubikfußes sich zum Gewichte des Körpers verhält, so verhält sich 1 Kubikfuß zu den Kubikfußen, die im Körper enthalten sind. Z. E. Eine unreguläre Masse von Blei wiege 2719 Pfund, und man finde daß 1 Kubikfuß Blei $795\frac{1}{5}$ Pfund wieget, so mache man folgende Rechnung:

$795\frac{1}{5}$ Pfund geben 1 Kubikfuß,
was 2719 Pfund?

Antwort $\frac{2719}{795\frac{1}{5}} = \frac{13595}{3966} = 3\frac{17}{40}$ beinahe

Also nimmt der Körper einen Raum von $3\frac{17}{40}$ Kubikfuß ein.

§. 17.

Aufgabe.

Einen unregulären Körper abbilden, oder einen anderen stellen, der ihm entweder ähnlichgleich, oder bloß ähnlich sey.

Auflösung. Lege eine Ebne unter dem Körper, und bilde denjenigen Theil der Oberfläche ab, der nach der Ebne zu lieget, wie im 13. §. gelehret worden, entweder in einerlei Größe, oder vergrößert, oder verkleinert.

Kehre den Körper um, und bilde ebenfalls die andere Seite der Oberfläche nach dem nemlichen Verhältnisse ab.

Füge beide Theile der abgebildeten Oberfläche so zusammen, wie sie im Körper selbst zusammen gefüget sind. So entstehet ein Körper, der dem gegebenen ähnlich ist.

Mechanische Auflösung. In den Künsten und Handwerken pfleget man wohl einen Körper bloß dem Augenmaaße nach abzubilden. Auch drücket man oft seine beide Hälften in eine weiche Materie ein, die sich hernach verhärtet und eine Form giebet, worin ähnlichgleiche Körper gegossen oder eingedrücket werden können.

§. 18.

Aehnliche irreguläre Körper verhalten sich allemal wie die Würfel der in ihnen auf ähnliche Art gezogenen geraden Linien. Ihre Oberflächen aber verhalten sich wie die Quadrate derselben Linien.

Daß sich ähnliche Körper, wenn sie gerade Flächen haben, wie die auf ähnliche Art in denselbigen gezogenen geraden Linien verhalten, wird in der gemeinen Geometrie gezeiget. Da nun die Körper mit gekrümmten Flächen die Gränzen derselben sind, so stehen diese auch im nemlichen Verhältnisse.

Daß die Flächen sich wie die Quadrate derselbigen Linien verhalten, ist vor kurzem in diesem Anhange bewiesen worden. Der Unterschied, daß dort von offenen Flächen, hier aber von geschlossenen die Rede ist, welche lezteren allerseits einen Raum begränzen, verändert den Beweis nicht.

Dritter Anhaug.

Wiederholung der vornemsten Lehren der höheren Geometrie.

§. 1.

Wenn ein Wanderer eine lange Reise geendiget hat, so erinnert er sich mit Vergnügen der merkwürdigsten Oerter und Dinge, die er auf seinem Wege angetroffen hat. Gleicherweise wird es demjenigen, der die höhere Geometrie vom Anfange bis zum Ende durchstudiret hat, und nun auf das Erlernte zurück denkt, nicht unangenehm seyn, wenn wir ihm hierinn zur Hülfe kommen, und ihm die vornemsten Lehrsätze dieser Wissenschaft ins Gedächtniß zurück führen.

§. 2.

Die höhere Geometrie handelt von krummen Linien. Unter allen krummen Linien ist der Kreis oder Zirkel die bekannteste. Dessen vornemsten Eigenschaften sind diese.

I) Das Quadrat jeder Applikate im Zirkel ist gleich dem Rechteck aus der Abzisse (vom Umkreise an gerechnet) und dem übrigen Theile des Durchmessers. Diese Eigenschaft wird ausgedrücket durch die Gleichung

$$y^2 = x\,(a - x)$$

oder $y^2 = a\,x - x^2$

wo

wo a der Durchmesser ist, x ist die Abzisse und y die Applikate. (I. H. § 6.)

II) Das Quadrat jeder Applikate ist auch gleich dem Quadrate des Halbmessers, weniger dem Quadrate der zustimmenden Abzisse (vom Mittelpunkte an gerechnet). Diese Eigenschaft wird vorgestellet durch die Gleichung

$$y^2 = r^2 - x^2$$

oder $y^2 = \frac{1}{4} a^2 - x^2$

wo r oder $\frac{1}{2} a$ der Halbmesser ist. (I. H. § 7)

§. 3.

Der Zirkel ist unter allen regulären krummen Linien am leichtesten zu zeichnen; hingegen sind die Eigenschaften der Parabel am leichtesten durch Gleichungen vorzustellen. Diese Eigenschaften sind hauptsächlich folgende:

I) Das Quadrat der Applikate ist gleich dem Rechteck aus der Abzisse und dem Parameter, oder aus der Abzisse und der vierfachen Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel, da diese vierfache Entfernung dem Parameter gleich ist. Also ist

$$y^2 = p\,x$$

oder $y^2 = 4\,b\,x$

wo p oder $4\,b$ der Parameter ist, hingegen ist $\frac{1}{4} p$ oder b die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel. (I. H. § 11)

II) In der Parabel verhalten sich die Abzissen wie die Quadrate der Applikaten, welches aus der vorigen Eigenschaft gefolgert wird. (I. H. § 12.).

§. 4.

Die Eigenschaften der Ellipse sind nicht ganz so einfach.

I) Die Hälfte der kleinen Axe ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen beiden Apsiden, das heißt, zwischen den Entfernungen eines der Brennpunkte von beiden Enden der großen Axe. (1 H. § 16).

II) Die kleine Axe ist auch die mittlere Proporzional-Linie zwischen der großen Axe und dem Parameter. (1 H. § 16.)

III) Wenn man den Mittelpunkt der Ellipse zum Ursprunge der Abzissen nimmt, so verhält sich die Differenz zwischen dem Quadrate der halben großen Axe und dem Quadrate der Abzisse, zum Quadrate der Applikate, wie sich das Quadrat der großen Axe verhält zum Quadrat der kleinen Axe. Diese Eigenschaft wird ausgedrücket durch

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)$$

wo a die große und b die kleine Axe ist. (1 H. § 17)

IV) Rechnet man die Abzissen vom Scheitel der großen Axe an, so verhält sich das Rechteck aus der Abzisse und dem übrigen Theile der Axe, zum Quadrate der Applikate, wie das Quadrat der großen Axe verhält zum Quadrate der kleinen Axe. Ist demnach a die große und b die kleine Axe, so hat man (1 H. § 17).

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,x\,(a - x)$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a\,x - x^2)$$

V)

V) Das Quadrat der großen Axe verhält sich zum Quadrate der kleinen Axe, wie die große Axe zum Parameter. Folglich kann man auch anstatt der beiden vorigen Gleichungen schreiben

$$y^2 = \frac{p}{a}(\tfrac{1}{4}a^2 - x)$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{p}{a}(a\,x - x^2)$$

Siehe I H. § 18.

VI) Die Beziehungen oder Verhältniße der Koordinaten sind die nemlichen, welche durch obige Gleichungen ausgedrücket worden, wenn man die Abzissen auf der kleinen Axe nimmt. Gedachte Gleichungen passen demnach auch in diesem Falle. Nur muß man unter a allemal diejenige Axe verstehen auf welcher x genommen wird, unter b die andere Axe, unter p die dritte Proporzional-Linie zur Axe der Abzissen und zur anderen Axe. (I H. § 19.)

VII) In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Applikaten, wie die Rechtecke aus beiden abgeschnittenen Theilen der Axe der Abzissen, es mag diese übrigens die große oder kleine seyn. (I H. § 21.)

§. 5.

Die Hyperbel hat zwar eine von der Ellipse sehr verschiedene Gestalt. Jedoch werden die Eigenschaften beider krummen Linien durch Gleichungen ausgedrücket, die nur bloß in den Zeichen + und — von einander abweichen.

I) In der Ellipse war $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)$.

Hingegen in der Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

Hier ist x die Abzisse vom Mittelpunkte aus gerechnet, y ist wie gewöhnlich die Applikate, a ist die Haupt-Axe und b die konjugirte Axe, das ist, die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Haupt-Axe und dem Parameter. (I H. § 27.)

II) Es war ferner in der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2)$.

Hingegen in der Hyperbel ist (I H. § 27)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$$

Die Abzissen x werden hier vom nächsten Scheitel an gerechnet.

III) In der Ellipse kann auch in beiden vorigen Fällen anstatt $\frac{b^2}{a^2}$ gesetzet werden $\frac{p}{a}$. Eben so in der Hyperbel (I H. § 26)

$$y^2 = \frac{p}{a}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}(ax + x^2)$$

IV) Jedoch muß alles vorhergehende nur von der Hyperbel in Betreff ihrer Haupt-Axe verstanden werden. Denn, nimmt man die Abzissen auf der konjugirten Axe, so ist

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + \tfrac{1}{4}b^2)$$

wo

wo a die Haupt-Axe und b die konjugirte Axe ist. (I H. § 19)

V) In der gleichseitigen Hyperbel, wo nemlich beide Axen und folglich auch der Parameter gleiche Größen sind, wird $\frac{b^2}{a^2}$ oder $\frac{p}{a} = 1$. Folglich, wenn die Abzissen aus dem Scheitel auf der Haupt-Axe genommen werden, ist (I H. § 20)

$$y^2 = a\,x + x^2$$

und aus dem Mittelpunkte auf derselben Axe

$$y^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2$$

Ferner, aus dem Mittelpunkte auf der zweiten Axe

$$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}\,b^2$$

VI) In der Hyperbel, wenn die Abzissen auf der Haupt-Axe genommen werden, verhalten sich die Quadrate der Applikaten wie die Rechtecke aus beiden abgeschnittenen Theilen der Axe, welche Theile von jedem Scheitel bis zur Applikate gerechnet werden.

Diese Eigenschaft ist also wiederum der Ellipse und der Hyperbel gemein. (I H. § 31.)

VII) Wenn die Abzissen auf der einen Asymptote und die Applikaten mit der anderen parallel genommen werden, so ist das Rechteck aus beiden Koordinaten allemal eine unveränderliche Größe, oder (I H. § 33.)

$$x\,y = m^2$$

§. 6.

Die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel werden Kegelschnitte genannt. Denn wenn ein gerader Kegel vermittelst einer Ebne so geschnitten wird, daß der Schnitt mit der einen Seite des Kegels parallel sey, so entstehet eine Parabel. Trift der Schnitt beide Seiten des Kegels,

gels, so bekömmt man eine Ellipse. Trift er aber die eine Seite und die Verlängerung der anderen über den Scheitel, so hat man eine Hyperbel. (I H. § 34.)

Die Ellipse wird zum Zirkel, wenn beide Axen und folglich auch der Parameter gleiche Größen sind, oder wenn der Schnitt mit der Grundfläche des Kegels parallel ist.

Auch wenn ein Zylinder schief durchgeschnitten wird, so entstehet eine Ellipse. (I H. § 35.)

§. 7.

Was die Tangenten der Kegelschnitte betrift, so gehören hierher folgende Sätze:

I) Um die Tangente für einen Punkt einer Ellipse oder Hyperbel zu ziehen, so ziehe man erstlich gerade Linien von dem gegebenen Punkte bis zu den beiden Brennpunkten, und verlängere sie nöthigenfalls über den Scheitel des Winkels den sie bilden. Man halbire den Winkel worinn die krumme Linie lieget, so ist die gerade Linie welche den Winkel halbiret, zugleich die verlangte Tangente. In der Parabel muß man annehmen, daß der andere Brennpunkt unendlich weit entfernet ist, und folglich wird vom gegebenen Punkte eine Linie nach dem Brennpunkte und die andere mit der Axe parallel gezogen. Der Winkel wird ebenfalls halbiret. (II H. § 2.)

II) Wenn die Haupt-Axe einer Ellipse oder Hyperbel a ist, der Parameter p, und die Abzissen x vom Scheitel an an gerechnet werden, so ist (II H. § 3.)

$$\text{Subnormale} = \tfrac{1}{2}p \mp \frac{px}{a}$$

Und weil a in der Parabel unendlich ist, so ist in derselben $\frac{px}{a} = o$, folglich ist die Subnormale bloß $\frac{1}{2}p$, oder die Hälfte des Parameters, also eine beständige Größe.

III) Wenn die Abzissen vom Scheitel an gerechnet werden, und es ist a die Haupt-Axe der Ellipse oder Hyperbel, so hat man

$$\text{Subtangente} = \frac{(a \mp x)\, x}{\frac{1}{2}a \mp x}$$

oder $(\frac{1}{2}a \mp x) : (a \mp x) :: x :$ Subtangente. Das Zeichen $-$ ist für die Ellipse, und $+$ für die Hyperbel. In der Parabel aber ist die Subtangente bloß $2x$ oder der doppelten Abzisse gleich. (II H. § 4.)

§. 8.

Laßt uns nun die Diameter der Kegelschnitte betrachten

I) Wenn man anstatt beider Axen einer Ellipse oder Hyperbel zwei konjugirte Diameter nimmt, und die Abzissen auf einem derselben entweder vom Mittelpunkt oder vom Scheitel an rechnet, die Applikaten aber mit dem andern Diameter parallel ziehet, so findet zwischen den Koordinaten die nemliche Gleichung sttatt, als bei den Axen.

Man kann also die Gleichungen, welche oben (§ 4 und 5) für die Ellipse und für die Hyperbel in Betreff der Axen gegeben worden, auch für jegliche zwei konjugirte Diameter gebrauchen. Dann ist a der Diameter worauf die Abzissen genommen werden, und b sein konjugirter Diameter. Ferner muß unter dem Parameter p allemal die dritte Proporzional-Linie verstanden werden zum Diameter worauf die Abzissen genommen werden, und zu seinem konjugirten Diameter. (III H. § 1 bis 27.)

II) Bei der Parabel ist die Gleichung für jeden Diameter ebenfalls die nemliche als für die Axe. Der Parameter ist aber alsdann so groß als die vierfache Entfernung des Brennpunktes vom Punkte wo der Diameter die Parabel schneidet. (III H. § 28.)

III) Bei der Ellipse ist es einerlei, man mag die Abzissen auf welchen man will von zwei konjugirten Diametern nehmen. Die Gleichung bleibet dieselbe. (IV H. § 2.)

IV) Bei der Hyperbel, wenn man die Abzissen auf dem Diameter nimmt, der sich wirklich in der Hyperbel endiget, so ist die Gleichung mit derjenigen für die Hauptaxe einerlei. Nimmt man aber die Abzissen auf dem anderen konjugirten Diameter, so bekömmt die Gleichung eben solche Gestalt als für die konjugirte Axe. (IV H. § 3.)

§. 9.

Vermöge der Kegelschnitte lassen sich alle Gleichungen des zweiten Grades konstruiren, nur muß man den Fall ausnehmen, wo die Gleichung an sich selbst ein unmögliches Verhältniß ausdrücket, und den Fall wo sie das Produkt zweier einfacher Gleichungen ist, und folglich durch ein System von zwei geraden Linien vorgestellet werden kann. (IV H. § 7.)

Die allgemeine Formel für alle mögliche Gleichungen des zweiten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen ist

$$dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = o$$

Wenn $c^2 - 4de$ eine positive Größe ist, so wird die Gleichung vermöge einer Hyperbel konstruiret. Ist $c^2 - 4de$ negativ, so muß man die Ellipse gebrauchen. Ist noch dabei $d = e$, und wird der Koordinatenwinkel ein rechter, so konstruiret man die Gleichung vermöge eines Zirkels.

Wenn

Wenn $c^2 - 4de = o$ oder $c^2 = 4de$, so wird die Konstrukzion vermittelst einer Parabel verrichtet. (IV H. §. 23.)

Hierbei ist zu merken, daß auch einige der Koeffizienten d, c, e, &c. null seyn können. Die allgemeinen Regeln bleiben nichts desto weniger in ihrer völligen Kraft.

Wie aber in jedem Falle die Konstrukzion geschehen soll, muß im ganzen vierten Hauptstücke nachgelesen werden.

§. 10.

Vermittelst der Gleichungen des zweiten Grades und ihrer Konstrukzion lassen sich verschiedene geometrische Aufgaben auflösen. Z. E.

I) Einen Punkt finden, so daß beide gerade Linien die aus demselben nach den Enden einer gegebenen geraden Linie gezogen werden, in einem gewissen Verhältniße stehen. (V H. § 2.)

Es findet sich vermöge der Auflösung, daß unendlich viel solche Punkte möglich sind, und daß sie alle im Umkreise eines Zirkels liegen.

II) Einen Punkt finden, so daß beide gerade Linien die aus demselben nach den Enden einer gegebenen geraden Linie gezogen werden, einen gegebenen Winkel bilden. (V H. § 3.)

Es findet sich wieder, daß unendlich viel Punkte die alle im Umkreise eines gewissen Zirkels liegen, die verlangte Eigenschaft haben.

Vermittelst dieser Aufgabe kann eine andere bestimmte aufgelöset werden. Nemlich, es sind drei Gegenstände, von bekannter Lage auf dem Felde, und aus einem gewissen Stand-Orte mißt man die Winkel unter welchen diese Gegenstände zwei und zwei gesehen werden. Es soll vermöge

möge dieser Winkel die Lage des Stand-Ortes bestimmet werden. (V H. § 3. Zusatz.)

III) Es soll ein Punkt gefunden werden, dessen Entfernungen, von einem andern gegebenen Punkte und von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, in einem gewissen Verhältnisse stehen. (V H. § 4.)

Die Auflösung giebt zu erkennen, daß unendlich viel solche Punkte möglich sind, und daß sie allemal in einem Kegelschnitte liegen, wovon der gegebene Punkt ein Brennpunkt ist. Soll die Entfernung vom gegebenen Punkte kleiner seyn als von der Linie, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Im umgekehrten Falle ist es eine Hyperbel; und wenn die Entfernungen gleich seyn sollen, so bekömmt man eine Parabel.

IV) Zwischen zwei gegebenen geraden Linien sollen zwei mittlere Proporzional-Linien gefunden werden. (V H. § 6.)

Dieses kann vermittelst zweier Parabeln geschehen, deren Parameter den gegebenen Linien gleich sind.

V) Einen gegebenen Zirkelbogen in drei gleiche Theile eintheilen. (V H. § 7.)

Dieses läßt sich thun vermittelst der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

VI) Aus einem gegebenen Punkte soll durch die Schenkel eines gegebenen Winkels eine gerade Linie gezogen werden, so daß der zwischen den Schenkeln liegende Theil eine gegebene Länge bekomme. (V H. § 10.)

Die Konstrukzion kann vermittelst einer Ellipse und einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten geschehen.

§. 11.

Außer den Kegelschnitten giebt er noch viele, ja unendlich viele andere krumme Linien die so beschaffen sind, daß die Beziehung ihrer Koordinaten sich durch algebraïsche Gleichung ausdrücken läßt. (VI H. § 1.)

Zum Exempel, die Gleichung der Zissoïde ist (VI H. § 3.)

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

Die Gleichung der Konchoïde ist (VI H. § 5.)

$$y^2 = \frac{(b \pm x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2}$$

wo das Zeichen + für die obere, und — für die untere Konchoïde gilt.

Alle Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Größen, als x und y, lassen sich durch Linien konstruiren oder ausdrücken. (VI H. § 6.), und die Linie wird im engeren Verstande algebraïsch genannt, wenn in der Gleichung derselben weiter nichts vorkömmt als Produkte und Potenzen der veränderlichen Größen. Der Satz in der Gleichung der die meisten Dimensionen hat bestimmet durch die Anzahl seiner Dimensionen die Ordnung der krummen Linie (VI H. § 7). Zur ersten Ordnung gehöret allein die gerade Linie (VI H. § 8.) und die krummen Linien fangen erst bei der zweiten Ordnung an.

Die Linien welche unter der allgemeinen Gleichung

$$y^m = a^n x^{m-n}$$

begrif-

begriffen sind, werden alle Parabeln genannt. Die Gleichung

$$y^m = a^n x^{m-n} - x^m$$

drücket Linien aus die von der Gattung des Zirkels sind. Eben so giebt die Gleichung

$$y^m = p^n x^{m-n} \mp \frac{p}{a} x^m$$

krumme Linie welche Ellipsen und Hyperbeln genannt werden. Die Gleichung

$$x^n y^m = a^{m+n}$$

giebt Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten, von allen Ordnungen.

Wenn der Parameter oder die beständige Größe $= 1$ angenommen wird, so ist

$$y = x^{\pm \frac{m}{n}}$$

oder $y^n = x^{\pm m}$

die gemeinschaftliche Gleichung für Parabeln und Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten. (VI H. § 9 und 10.)

§. 12.

Wenn man zwei Gleichungen mit einander multiplizi-ret, so giebt die entstandene Gleichung keine neue krumme Linie, sondern ein System von beiden Linien, die durch diejenigen Gleichungen ausgedrücket werden, welche in einander multipliziret worden. (VI H. § 11.)

Die Gleichung einer krummen Linie bekömmt oft eine ganz andere Gestalt, wenn man andere Axen oder Direk-

trißen

trißen nimmt. Jedoch bleibet sie allemal von der nemlichen Ordnung oder vom nemlichen Grade. (VI H. § 14.) Die allgemeine Formel für die Linien erster Ordnung ist

$$a + by + cx + = o$$

und drücket allemal gerade Linien aus. Die Linien der zweiten Ordnung sind alle durch diese allgemeine Gleichung vorgestellet.

$$a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = o$$

und sind alle nichts anders als Kegelschnitte, worunter der Zirkel auch begriffen werden kann. Die Linien dritter Ordnung sind in dieser allgemeinen Gleichung enthalten

$$a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + kx^3 = o$$

Durch das analytische Dreieck lassen sich alle diese Gleichungen sehr bequem vorstellen. (VI H. § 15 bis 19.)

§. 13.

Die Lehre von den krummen Linien erfordert nothwendig die Kenntniß einiger Rechnungs-Arten, die nicht allgemein bekannt sind, z. B. die Rechnung mit negativen und gebrochenen Exponenten; die Funkzionen und ihre Verwandlungen vermöge der unbestimmten Koeffizienten; die Newtonische Binomial-Formel; die Rechnung der endlichen und unendlich kleinen Differenzen; die Integral-Rechnung. Alles dieses findet man im VIIten Hauptstücke des gegenwärtigen Werkes kürzlich erläutert.

§. 14.

Die leichteste Anwendung der Differenzial-Rechnung bestehet in der Erforschung der Tangenten der krummen Linien, und der damit verwandten geraden Linien; und der leichteste Fall ist derjenige, wo die Koordinaten alle-

mal

mal einen rechten Winkel bilden. In diesem Falle gebrauchet man folgende Formeln (VIII H. § 2.)

die Subtangente ist $= y \frac{dx}{dy}$

die Subnormale ist $= y \frac{dy}{dx}$

die Tangente ist $= y \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$

die Normale ist $= y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$

Die Tangente des Winkels den die krumme Linie (oder deren Tangente) in einem ihrer Punkte mit der Applikate machet ist (VIII H. § 4)

$$\frac{dx}{dy}$$

Hingegen die Tangente des Winkels den die krumme Linie (oder deren Tangente) in einem Punkte mit der Direktrixe machet ist (VIII H. § 4.)

$$\frac{dy}{dx}$$

Es giebt auch eine umgekehrte Methode der Tangenten, welche darinn bestehet, daß man vermittelst der Integral-Rechnung die krumme Linie suchet, deren Subtangente oder Subnormal-Linie durch eine gegebene Funkzion der Koordinaten ausgedrücket wird. Es sey U die Funkzion, welche die Subtangente ausdrücket, so ist (VIII H. § 5.)

$$y \frac{dx}{dy} = U$$

$$y\, dx = U\, dy$$

Diese

Diese Differenzial-Funkzion muß integriret werden, wenn man die Gleichung der krummen Linien finden will. Es sey ferner V die Funkzion, welche die Subnormale ausdrücken soll, so muß integriret werden

$$y \frac{dy}{dx} = V$$

oder $y\,dy = V\,dx$

§. 15.

Bei den Tangenten kommen nur Differenziale der ersten Ordnung vor, hingegen bei den Krümmungs-Halbmessern steigen die Differenziale bis zur zweiten Ordnung. Es ist nemlich die allgemeine Formel für diesen Halbmesser (IX H. § 7.)

$$-\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder auch

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,d^2y}$$

Bei der zweiten Differenziazion muß hier allemal dx als beständig betrachtet werden.

Die Evolute, das ist, diejenige krumme Linie worinn sich alle Halbmesser der Krümmung einer anderen Linie endigen, wird durch folgende beide Formeln gefunden (IX H. § 9.)

$$x = z + \frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx}$$

$$y = -u - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

Hier ist wiederum dx als eine beständige Größe zu behandeln. Es werden aus der gegebenen Gleichung die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx^2}{d^2y}$ gezogen und in beide Formeln gesetzet. Hernach werden vermittelst derselben x und y in Funkzionen von z und u gesuchet. Diese Funkzionen werden anstatt x und y in die gegebene Gleichung gesetzet; so kömmt eine Gleichung zwischen den Abzissen z und den Applikaten u der Evolute. Die Direktrize und der Ursprung der Abzisse ist dann eben so wie bei der gegebenen Linie.

Auf solche Art findet man, daß die Evolute der gewöhnlichen Parabel eine kubische Parabel ist.

§. 16.

In den meisten krummen Linien giebt es einige Punkte die vor allen übrigen merkwürdig sind.

I) Der Punkt wo die Applikate am größten oder am kleinsten ist, wird also bestimmet. Man differenziret die Gleichung, und setzet in der Differenzial-Gleichung $dy = o$, so ergiebt sich ein Werth von x, welcher zum Punkte gehöret, wo die Applikate am größten oder am kleinsten ist. Wird dieser Werth von x in die Gleichung der krummen Linie gesetzet, so bekömmt man den größten oder kleinsten Werth welchen y haben kann. Was noch weiter dabei zu beobachten ist, wird am gehörigen Orte gelehret. (X H. § 3.)

II) Die größte oder kleinste Abzisse wird eben so gefunden. Nemlich in der Differenzial-Gleichung der krummen Linie setzet man $dx = o$. Dann ergiebt sich ein gewisser Werth von y. Dieser wird in die gegebene Gleichung gesetzet, und dadurch bestimmet sich der größte oder kleinste Werth von x. (X H. § 5.)

III)

III) Die Punkte wo eine krumme Linie ihre Direktrize schneidet, oder derselben begegnet, werden gefunden, wenn man in der gegebenen Gleichung $y = o$ machet. So viel Werthe alsdann für x herauskommen, so viel giebt es Punkte wo $y = o$ ist, und wo folglich die krumme Linie ihrer Direktrize begegnet.

IV) Der Biegungspunkt, das ist, derjenige Punkt, welcher den konkaven Theil der krummen Linie vom konvexen Theile scheidet, wird also gefunden. (XI H. § 9.) Man differenziret zweimal die Gleichung der krummen Linie, und betrachtet dabei dx als eine beständige Größe. In der zweiten Differenzial-Gleichung setzet man $d^2y = o$, so ergiebt sich ein Werth von x der dem Biegungs-Punkte zustimmet. Setzet man ferner diesen Werth von x in die gegebene Gleichung, so bekömmt man auch den Werth von y, welcher den Biegungspunkte zustimmet. Was sonst noch hierbei zu beobachten ist, findet man am angeführten Orte.

V) Um zu finden, wie viel es in einer krummen Linie vielfache Punkte giebt, das ist, solche Punkte, wo mehrere Zweige einander begegnen oder schneiden, suchet man $\frac{dy}{dx}$. Es sey $\frac{dy}{dx} = \frac{U}{V}$, wo U und V Funkzionen von x und y sind. Man mache $U = o$ und $V = o$, so ziehet man aus diesen beiden Gleichungen einen oder mehrere Werthe von x und von y. Man setze jeden Werth des x mit einem Werthe des y in die gegebene Gleichung. Man beobachte welcher Werth des x und des y der gegebenen Gleichung Genüge leistet. So hat man die Koordinaten welche zu einen vielfachen Punkte gehören. Findet man nun mehrere Paare solcher Koordinaten, so giebt es auch eben so viel vielfache Punkte in der krummen Linie. (X H, § 13.)

VI) Wenn man einen vielfachen Punkt gefunden hat, so fräget sichs weiter, wie vielfach er ist oder wie viel Zweige in demselben einander begegnen? Um dieses zu erfahren, verfährt man folgendermaßen. Nachdem man die beiden Koordinaten bestimmet hat, die zu einem vielfachen Punkte gehören, und die folglich $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{U}{V} = \frac{o}{o}$ machen, so differenziret man weiter, indem man allemal sowohl dx als dy wie beständige Größen behandelt. Man bekömmt also nach und nach $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$, u. s. f. In den Werthen dieser Verhältnisse setze man die Werthe von x und y, welche den vielfachen Punkt gegeben haben. Man halte ein, so bald diese Substituzion nicht mehr $\frac{o}{o}$, sondern einen verständlichen Werth giebt. Gesetzet nun, man finde für $\left(\frac{dy}{dx}\right)^n$ einen verständlichen Werth, so ist der Punkt $n$fach, weil alsdann $\frac{dy}{dx}$ n verschiedene Werthe bekömmt. Sind einige Werthe von $\frac{dy}{dx}$ imaginär, so ist der Punkt nur so vielfach, als wirkliche Werthe vorhanden sind. Die übrigen Zweige sind in diesem Falle imaginär oder unsichtbar. (XH. § 14)

§. 17.

Was wir bis jezt in den krummen Linien betrachtet haben, sind nur zufällige Dinge. Nun kommen wir auf deren Ausmessung.

I) Eine krumme Linie wird rektifiziret, oder deren Länge wird bestimmet, vermöge der Formel

$$\int (dx^2 + dy^2)$$

wel-

welche integriret werden muß, nachdem dy in einer Funkzion von x und dx, oder dx in einer Funkzion von y und dy ausgedrücket worden. (XI H. § 2)

II) Der Flächen-Inhalt zwischen zwei Koordinaten und dem zustimmenden Bogen der krummen Linie wird gefunden vermöge der Formel

$$y\,d\,x$$

welche integriret wird, nachdem y in einer Funkzion von x, oder dx in einer Funkzion von y und dy ausgedrücket worden. (XI H. § 4.)

III) Wenn ein Bogen der durch die Koordinaten x und y bestimmet wird, sich um die Direktrißе herum drehet, so beschreibet er eine Kappe, deren Größe durch diese Formel gefunden wird

$$2\,\pi\,y\,\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}$$

wo π die halbe Peripherie für den Halbmesser 1 ist. Diese Formel wird integriret, nachdem dx in einer Funkzion von y und dy; oder dy in einer Funkzion von x und dx, y aber in einer Funkzion von x ausgedrücket worden. (XI H. § 6.)

IV) Wenn die Ebne, welche zwischen einem Bogen der krummen Linie und den zustimmenden Koordinaten enthalten ist, sich um die Axe herum drehet, so entstehet ein runder Körper, dessen Element oder Differenzial ist

$$\pi\,y^2\,d\,x$$

Diese Formel wird integriret, nachdem dx in einer Funkzion von y und dy, oder y^2 in einer Funkzion von x ausgedrücket worden. (XI H. § 8.)

§. 18.

Bei allen vorigen Formeln wurde vorausgesetzet, daß der Koordinaten-Winkel ein Rechter wäre. Ist er aber schief, so müssen die Formeln etwas geändert werden, und Funkzionen des Koordinaten-Winkels enthalten. Es sey ξ dieser Winkel.

I) Die Subtangente ist

$$y\,\frac{dx}{dy}$$

und der Winkel ξ kömmt hier gar nicht in Anschlag. (XII H. § 2.)

II) Die Tangente des Winkels, welchen die krumme Linie mit der Applikate machet ist (XII H. § 3.)

$$\frac{dx\,S\xi}{dy+S'\xi}$$

III) Die Tangente des Winkels, welchen die krumme Linie oder ihre Tangente, mit der Direktrize bildet, ist (XII H. § 4.)

$$\frac{dy\,S\xi}{dx+dy\,S'\xi}$$

IV) Die Subnormal-Linie ist (XII H. § 5.)

$$y\left(\frac{dx\,S'\xi+dy}{dx+dy\,S'\xi}\right)$$

V) Die Tangente ist (XII H. § 6.)

$$y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}+2\,\frac{dx}{dy}\,S'\xi\right)}$$

VI)

VI) Die Normale ist (XII H. § 6.)

$$\frac{y \mathfrak{S} \xi}{\frac{\partial x}{\partial y} + \mathfrak{S}' \xi} \sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial x}{\partial y} \mathfrak{S}' \xi + 1\right)}$$

VII) Der Krümmungsmesser ist (XII H. § 7.) wenn ∂x als beständig behandelt wird

$$-\left(1 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \mathfrak{S}' \xi + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{\partial x^2}{\partial^2 y} \cdot \frac{1}{\mathfrak{S} \xi}$$

VIII) Die größte oder kleinste Applikate wird gefunden, wenn man annimmt

$$\partial y = o$$

eben so wie bei rechtwinklichen Koordinaten. (XII H. § 8.)

IX) Das Element der Länge der krummen Linie ist (XII H. § 9.)

$$\sqrt{(\partial x^2 + 2 \partial x \partial y \mathfrak{S}' \xi + \partial y^2)}$$

X) Das Element des Raumes ist (XII H. § 10.)

$$y . \mathfrak{S} \xi . \partial x$$

XI) Das Element der Kappe, die durch die Umdrehung des Bogens entstehet, ist (XII H. § 11.)

$$2 \pi y \mathfrak{S} \xi \sqrt{(\partial x^2 + 2 \partial x \partial y \mathfrak{S}' \xi + \partial y^2)}$$

XII) Das Element des runden Körpers ist (XII H. § 12.)

$$\pi y^2 \mathfrak{S} \xi^2 (\partial x + \partial y \mathfrak{S}' \xi)$$

und vom Integrale muß $\frac{1}{3} \pi y^3 \mathfrak{S}' \xi$ abgezogen werden.

§. 19.

Nicht alle krumme Linien können durch gemeine algebraïsche Gleichungen ausgedrücket werden; sondern es giebt auch transzendente Linien, deren Gleichungen Logarithmen, und andere höhere Funkzionen der Koordinaten enthalten. Eine solche Linie ist die logarithmische Linie selbst. Deren Gleichung ist

$$x = \text{Log. } y$$

oder $y = a^x$

wo a die Basis irgend eines Logarithmensystemes vorstellet. (XIII H. § 12.)

Sie hat eine beständige oder unveränderliche Subtangente, welche der Modulus des Systemes genannt wird. (XIII H. § 13.)

Mit Hülfe der logarithmischen Linie lasse sich die Logarithmen auf eine bequeme Art berechnen.

I) Um logarithmische Größen und Exponenzial-Grössen zu differenziren hat man diese Formeln

$$\partial \, l \, y = \frac{\partial y}{y}$$

$$\partial (e^x) = e^x \, \partial \, x$$

Hier wird angenommen, daß der Modulus 1 ist, welches das natürliche oder hyperbolische System giebt. Es ist e die Basis dieses Systemes, und l stellet den natürlichen Logarithmus vor. (XIII H. § 14.)

II)

II) Kehret man beide vorige Formeln um, so hat man zwei nüzliche Integral Formeln, nemlich (XIII H. §. 15.)

$$\int \frac{dy}{y} = l\, y$$

$$\int (e^x\, dx) = e^x$$

III) Der natürliche Logarithmus einer Zahl wird durch unendliche Reihen berechnet, nemlich (XIII H. § 17.)

$$l(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \&c.$$

oder $$lz = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \&c.$$

oder

$$ln = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \&c.\right]$$

Diese lezte Reihe ist in der Ausübung die bequemste.

IV) Um den gewöhnlichen oder Briggischen Logarithmus einer Zahl zu finden, so suchet man erstlich den natürlichen, und multipliziret ihn mit 0,4342944..., welche Zahl der Modulus des Briggischen Systemes ist. (XIII H. § 18.)

V) Wenn m der Modulus des Systemes ist, so wird die Zahl, die einem Logarithmus u zustimmet, ausgedrücket durch (XIII H. § 19.)

$$1 + \frac{u}{1.m} + \frac{u^2}{1.2.m^2} + \frac{u^3}{1.2.3.m^3} + \frac{u^4}{1.2.3.4.m^4} + \&c.$$

oder im natürlichen Systeme, wo $m = 1$, durch

$$1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2.} + \frac{u^3}{1.2.3.} + \frac{u^4}{1.2.3.4.} + \text{&c.}$$

VI) Die Basis e des natürlichen Systems wird gefunden (XIII H. § 19. Zusatz I.)

$$e = 2,7182818\ldots\ldots$$

VII) Es ist (XIII H. § 19. Zusatz II.)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4.} + \text{&c.}$$

$$a^z = 1 + z\,la + \frac{z^2(la)^2}{1.2} + \frac{z^3(la)^3}{1.2.3.} + \frac{z^4(la)^4}{1.2.3.4.} + \text{&c.}$$

Die logarithmische Linie läßt sich übrigens wie andere krumme Linien behandeln. Man kann ihre Tangente, Subnormal-Linie, die Länge ihrer Bogen, ihre Ebne, ihre Revolutions-Fläche, ihren Revolutions-Körper berechnen. (XIII H. § 20 bis 25)

§. 20.

Zirkelgrößen oder trigonometrische Linien kommen in den Gleichungen der krummen Linien eben so häufig vor als Logarithmen. Dabei ist hauptsächlich folgendes zu merken.

I) Die nöthigsten Differenzial-Verhältnisse sind diese (XIV H. § 2.)

$$\partial \mathfrak{S} z = \partial z \cdot \mathfrak{S}' z$$
$$\partial \mathfrak{S}' z = -\partial z \cdot \mathfrak{S} z$$
$$\partial \mathfrak{T} z = \frac{\partial z}{\mathfrak{S}' z^2}$$
$$\partial \mathfrak{T}' z = \frac{-\partial z}{\mathfrak{S} z^2}$$
$$\partial \mathfrak{A}\mathfrak{S} z = \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$
$$\partial \mathfrak{A}\mathfrak{S}' z = \frac{-\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$$
$$\partial \mathfrak{A}\mathfrak{T} z = \frac{\partial z}{1+z^2}$$
$$\partial \mathfrak{A}\mathfrak{T}' z = \frac{-\partial z}{1+z^2}$$

II) Die gebräuchlichsten Integrale sind folgende: (XIV H. § 3.)

$$\int \partial z\, \mathfrak{S}' z = \mathfrak{S} z + C$$
$$\int \partial z\, \mathfrak{S} z = -\mathfrak{S}' z + C$$
$$\int \frac{\partial z}{\mathfrak{S}' z^2} = \mathfrak{T} z + C$$
$$\int \frac{\partial z}{\mathfrak{S} z^2} = -\mathfrak{T}' z + C$$
$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} \frac{z}{a} + C$$
$$\text{oder} \quad -\mathfrak{A}\mathfrak{S}' \frac{z}{a} + C$$
$$\int \frac{\partial z}{a^2+z^2} = \frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T} \frac{z}{a} + C$$
$$\text{oder} \quad -\frac{1}{a}\mathfrak{A}\mathfrak{T}' z + C$$

III)

III) Wenn der Sinus oder die Tangente gegeben ist, so wird der Bogen durch folgende Reihen gefunden. (XIV H. § 4.)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{S}z = z + \frac{z^3}{1.2} + \frac{3z^5}{2.4.5} + \frac{3.5.z^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.z^9}{2.4.6.8.9} + \&c.$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{T}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \&c.$$

IV) Wenn der Bogen gegeben ist, so wird der Sinus oder der Kosinus also berechnet (XIV H. § 5.)

$$\mathfrak{S}u = u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

$$\mathfrak{S}'u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^5}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

§. 21.

Der Gebrauch der trigonometrischen Größen zeigt sich sogleich bei der Zykloide, deren Gleichung einen Zirkelbogen enthält. Denn es ist diese Gleichung

$$y = \frac{b}{c}\,\mathfrak{A}\mathfrak{V}\,x + \sqrt{(2x - x^2)}$$

Hier wird der Halbmesser des erzeugenden Zirkels = 1 angenommen. $\frac{b}{c}$ ist das Verhältniß der Peripherie des erzeugenden Zirkels zur Basis der Zykloïde. Wenn $b = c$ so hat man die einfache oder gemeine Zykloïde. Ist $b < c$, so ist es die verkürzte Zykloïde. Ist $b > c$, so ist es die verlängerte Zykloïde. (XV H. § 1).

Vermittelst der angegebenen Gleichung lassen sich nun alle gewöhnliche Formeln für die Tangenten, für den Krümmungsmesser, u. s. f. auf die Zykloïde anwenden. Unter andern ist zu merken, daß die Evolute einer gemeinen Zykloïde derselben vollkommen ähnlich und gleich ist. (XV H. § 13.) In der verkürzten Zykloïde findet eine größte Applikate Statt (XV H. § 14), und in der verlängerten ein Biegungs-Punkt (XV H. § 15). Die länge der einfachen Zykloïde beträgt allemal 4mal den Diameter des erzeugenden Zirkels (XV H. § 16.)

§. 22.

Bisher wurde bei allen Gleichungen der krummen Linien voraus gesetzet, daß die Applikaten mit einander parallel wären. Dieses findet aber nicht bei solchen Linien Statt, die um einen Pol oder unverrückten Punkt herum beschrieben sind. In diesem Falle drücket die Gleichung den Vektor aus, in einer Funkzion des Winkels welchen derselbe beschrieben hat. Z. E.

I) In der archimedischen Spiral-Linie ist

$$v = n \cdot \varphi$$

wo φ den Bogen vorstellet der den vom Vektor durchlaufenen Winkel mißt, wenn der Halbmesser = 1 angenommen wird. Es ist n eine beliebige Zahl, und v ist der Vektor selbst. (XVI H. §. 3.)

II) In der logarithmischen Spiral-Linie ist (XVI H. §. 5.)

$$m\, l\, v = r\, \varphi$$

$$\text{oder } l\, v = \frac{r}{m}\, \varphi$$

$$\text{oder } l\, v = n\, \varphi$$

II)

III) In der Quadratrisse ist (XVI H. § 7.)

$$v = \frac{r(\pi - 2\varphi)}{\pi . \mathfrak{S}' \varphi}$$

Hier ist π der halbe Umkreis des Zirkels für den Halbmesser 1, und r ist der Halbmesser eines gegebenen Zirkels.

IV) In der Epizykloïde ist (XVI H. § 9.)

$$v^2 = a^2 + 2\,a\,b . \mathfrak{S}' \frac{n}{m} \varphi + b^2$$

Hier ist a des Halbmesser des unbeweglichen Zirkels, b der Halbmesser des beweglichen Zirkels, n und m sind willkürliche Zahlen. Der Winkel φ aber hat nicht den eigentlichen Vektor zum Schenkel.

V) Wenn man die Konchoïde als eine um einen Pol beschriebene Linie betrachtet, so ist in derselben (XVI H. § 11.)

$$v = \frac{a}{\mathfrak{S}' \varphi} \pm b$$

Das Zeichen + ist für die obere, und — für die untere Konchoïde.

VI) In der Ellipse ist (XVI H. § 12.)

$$v = \frac{a^2 - e^2}{a + e\,\mathfrak{S}' \varphi}$$

a ist die halbe Haupt-Axe und e die Ekzentrizität.

VII) In der Hyperbel ist XVI H. § 13.)

$$v = \frac{e^2 - a^2}{a + e\,\mathfrak{S}' \varphi}$$

VIII)

VIII) In der Parabel ist

$$v = \frac{\frac{1}{2} p}{1 \pm \mathfrak{S}' \varphi}$$

Es ist $\frac{1}{2} p$ der halbe Parameter. Das Zeichen + gehöret zum spitzigen Winkel, und das Zeichen — zum stumpfen.

§. 23.

Die Tangente für jeden Punkt einer Linie die um einen Pol beschrieben ist zu bekommen, muß man den Winkel bestimmen, welchen die verlangte Tangente mit dem Vektor bildet. Dazu dienet die Formel (XVI H. § 15.)

$$\mathfrak{T} \xi = v \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Hier muß $\partial \varphi$ in einer Funkzion von ∂v ausgedrücket werden, oder ∂v in einer Funkzion von $\partial \varphi$, welches vermöge der gegebenen Gleichung der krummen Linie geschiehet.

Suchet man vermöge dieser Formel den Winkel ξ für die logarithmische Spiral-Linie, so findet man, daß er eine beständige oder unveränderliche Größe ist. (XVI H. § 15. Ex. II.)

§. 24.

Alle Linien die wir bisher betrachtet haben, sind nur einfach gekrümmt. Es giebt aber auch doppelt gekrümmte Linien, die nicht in einer Ebne liegen.

Ihre Beschaffenheit wird durch drei Koordinaten x, y und z bestimmet, und durch zwei Gleichungen, eine zwischen x und y, die andere zwischen y und z. Aus beiden

den kann man eine dritte ziehen, nemlich zwischen x und z. (XVII H. § 3 und 4).

Bei doppelt gekrümmten Linien ist allemal (XVII H. § 5.)

$$\text{Subtangente} = z\frac{dx}{dz} = z\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$$

$$\text{die Subnormale} = z\frac{dz}{dx} = z\frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$$

Wenn man $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ in einer Funktion von dz ausdrücket, so geben beide Formeln endliche Größen, das ist solche, worinn kein Differenzial mehr vorhanden ist.

§. 25.

Krumme Flächen werden eben so wie krumme Linien durch drei Koordinaten x, y, z bestimmet, mit dem Unterschiede, daß hier eine einzige Gleichung zwischen x, y und z gegeben wird, so daß z bestimmet werde, wenn man willkürlich x und y bestimmet. Z. E. Die Gleichung für die Oberfläche eines geraden und rechtwinklichen Kegels ist (XVII H. § 8.)

$$z^2 = x^2 - y^2$$

und die Gleichuug für die Oberfläche der Kugel ist

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2$$

Vermittelst solcher Gleichungen lassen sich die Krümmungen solcher Linien bestimmen, die da entstehen, wenn eine krumme Fläche von einer Ebne geschnitten wird. (XVII H. §. 9. 10. 11. 12.)

§. 26.

Die Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung auf geometrische Aufgaben sind unerschöpflich. Merkwürdig sind unter anderen diejenigen Fragen, welche verschiedene Linien (theils krumme, theils gerade) betreffen, die einander berühren oder schneiden. Da dergleichen Aufgaben nicht gut ohne Figuren verstanden werden können, so will ich sie hier nicht wiederholen. Man sehe das XVIII. Hauptstück §. 2. 3. 4. 5.

Hierher gehören auch die Gleichschnitte (Trajectoires), das ist, solche Linien welche unendlich viel andere Linien gleicher Art unter einem beständigen Winkel schneiden. (XVIII. H. §. 6. u. 7.) Z. E. Man findet, daß der Gleichschnitt unendlich vieler gerader Linien die aus einem Punkte entspringen die logarithmische Spiral-Linie ist, welches auch sonst bekannt ist.

§. 27.

Die Untersuchung der Gleichschnitte führet auf die Lehre von den Variazionen. Dieses sind die unendlich kleinen Differenzen der Koordinaten, welche aus der unendlich kleinen Veränderung der Gleichung einer krummen Linie herstammen. Sie werden durch δ bezeichnet, und sind übrigens ohngefähr den nemlichen Regeln unterworfen als die Differenziale. Vermittelst der Variazions-Rechnung, wenn sie mit der Differenzial- und Integral-Rechnung verbunden wird, lassen sich verschiedene schwere Fragen von den Maximis und Minimis auflösen. Z. E.

1) Welches ist das Größte unter allen möglichen Vielecken, die man aus gewissen gegebenen Seiten bilden kann? Es findet sich, daß es allemal dasjenige ist, wel-

welches in einem Zirkel eingeschrieben werden kann. (XIX H. § 18).

II) Welches ist diejenige krumme Linie, welche zwischen einem ihrer Bögen, dem zustimmenden Krümmungs-Messer, und dem zustimmenden Theile der Evolute, einen Raum enthält der allemal ein Minimum sey? Es findet sich, daß es die Zykloïde ist. (XIX H. § 25.)

III) Unter allen krummen Linien von gleicher Länge wird diejenige verlanget, welche bei der Umwendung um ihre Axe die kleinste Fläche beschreibet? Man findet, daß es eine Linie sey, welche in der Mechanik die Kettenlinie genannt wird, weil sie die Krümmung einer Kette vorstellet, die an beiden Enden aufgehänget ist. (XIX H. §. 27.)

IV) Unter allen krummen Linien, die zur nemlichen Abzisse gehören, die nemliche Länge haben, und den nemlichen Raum einschliessen, wird diejenige verlanget, welche bei der Umwendung um ihre Axe den größten oder kleinsten Körper beschreibet? Es findet sich, daß es eine mechanische Linie ist, welche die elastische genannt wird, weil sie eine gebogene Klinge vorstellet. (XIX H. § 28).

§. 28.

Diese kurze Uebersicht des Feldes, welches der Leser durchwandert hat, wird ihn überzeugen, daß der vornehmsten Lehren und Aufgaben in der höheren Geometrie eben nicht so viel sind, als man sich es anfänglich vorstellet. Die Vorbereitungen und Beweise erfordern allemal die meiste Zeit und nehmen in Büchern den größten Raum ein. Hat man einmal die Beweise recht begriffen, so ist es nicht nöthig, daß man sich derselben jedesmal erinnere,

sondern es ist genug, daß man die Lehrsätze selbst im Gedächtniße aufbewahre, um sie bei Gelegenheit anzuwenden. Sobald man sich überzeuget hat, daß alles auf einem festen Grunde gebauet ist, so brauchet man nicht jedesmal die Fundamente von neuem zu besichtigen.

Aber, wird vielleicht der Lehrling fragen, enthält dieses Buch alles, was von der höheren Geometrie gesaget werden kann? Nein, sondern es enthält diejenigen Lehren, wodurch man sich in den Stand setzet, die Schriften der großen Geometer zu verstehen, und ihrem Gedankenlaufe zu folgen.

Ist die höhere Geometrie wirklich nützlich und auf irgend etwas anzuwenden, oder ist es nur eine leere Grübelei? Man muß gestehen, daß sie im gemeinen Leben selten gebrauchet wird. Auch in Künsten beruhet meistens alles auf der geraden Linie und dem Zirkel. Ihr Nutzen zeiget sich aber hauptsächlich in der höheren Mechanik, wo die krummen Linien bestimmet werden müssen, welche die bewegten Körper beschreiben. Und, soll ich meine Meinung aufrichtig gestehen, so betrachte ich die höhere Geomerrie hauptsächlich als eine sehr nüzliche und fast unentbehrliche Uebung im Kalkuliren, vorzüglich in der Differenzial- und Integral-Rechnung. Ohne eine ziemliche Geläufigkeit in diesen Rechnungen wird man in der angewandten Mathematik nie die Anfangsgründe überschreiten; und ohne die höhere Geometrie wird man nie eine so bequeme Gelegenheit finden, um sich im Kalkuliren zu üben.

Ist die Geometrie eine vollständige und gänzlich erschöpfte Wissenschaft, oder kann man hoffen, noch etwas Wichtiges darinn zu entdecken? Das weiß ich nicht. Bevor eine Entdeckung gemacht ist, hat man keinen Begriff davon, und kann also nicht sagen, ob sie möglich sey oder nicht. Indessen vermuthe ich, daß sogar in der gemeinen

Geometrie noch Grundsätze oder Lehrsätze fehlen, wodurch krummlinichte Figuren, als z. E. Zirkel, mit geradlinichten verglichen werden könnten. Die Aufgaben von dem Dreischnitte des Winkels, und von den zwei mittlern Proporzional-Linien geben gleichfalls zu vermuthen, daß alle mögliche Lehrsätze der gemeinen Geometrie noch nicht entdeckt sind. Was die höhere Geometrie betrift, so scheinet es nicht unmöglich zu seyn, daß jemand in der folgenden Zeit, wo nicht neue merkwürdige Lehrsätze, doch wenigstens bequemere Methoden entdecke.

Ende des dritten Anhanges und der höheren Meßkunst.

Druck:

Druckfehler in diesem Unterrichte in der höheren Meßkunst.

Zur Zeit da ich zum erstenmale den glücklichen oder unglücklichen Vorsatz faßte, meine Gedanken unter der Presse der Buchdrucker und unter der Geißel der Rezensenten foltern zu lassen, war ich übermüthig genug zu hoffen, daß ich ein Buch fast ohne Druckfehler in die weite Welt schicken würde. Die Erfahrung hat mich aber bald belehret, wie sehr mich meine Hofnung getäuschet hatte. Jezt schätze ich mich glücklich, weun sich nur nicht solche Druckfehler in meine Werke einschleichen, die den Leser in Verlegenheit setzen könnten. Solche schmeichle ich mir bei gegenwärtiger Arbeit vermieden zu haben. Die merklichsten, welche ich bisher darinn gefunden habe, sind folgende:

Im ersten Theile, Seite 326, ist die Blattnummer unrichtig, indem oben 226 stehet.

Auf der folgenden Seite, nemlich der 327ten, in der achten Zeile von unten, stehet p^{-} anstatt p^{-1}

Im zweiten Theile Seite 100, in der vierten Formel stehet S'_z anstatt T'_z.

Der Leser beliebe diese Fehler, hauptsächlich den leztern, mit der Feder zu verbessern.

Nachtrag

zu den Druckfehlern des selbstlernenden Geometers.

Ein fleißiger Jüngling, welcher den selbstlernenden Geometer gebrauchet hat, um die gemeine Geometrie daraus ohne fremde Hülfe zu erlernen, hat mir folgende Druckfehler mitgetheilet, die er darinn angetroffen hat. Da sie einem andern vielleicht einige Mühe ersparen können, so füge ich sie hier bei.

Im ersten Theile.

Seite 119, Zeile 1, $\frac{1}{3}a^2$ anstatt $\frac{1}{4}a^2$

Seite 120, Zeile 10, dG anstatt DG

Seite 231, Zeile 1, — anstatt =

Seite 231, Zeile 8, EG anstatt EC

Seite 239, Zeile 8, $\sqrt{}$ 5 AB anstatt $\sqrt{}$ 5 AB^2

Seite 245, Zeile 11, A^2 anstatt AB^2

Im zweiten Theile.

Seite 10, Zeile 11, $\leqq$ anstatt $\leq$

Seite 33, Zeile 22, Prismen anstatt Pyramiden.

Seite 50, Zeile 13, Flächen-Inhalt anstatt körperlicher Inhalt.

Seite 78, Zeile 21, Halbmesser anstatt Durchmesser.

Seite 101, vorlezte Zeile, Durchmesser anstatt Halbmesser.

Seite 109, Zeile 2, 2 AD anstatt $\frac{1}{2}$ AD.

Seite 162, lezte Zeile, + 3 I K anstatt $\times$ 3 I K.

Seite 163, Zeile 5, der nemliche Druckfehler.

Seite 241, Zeile 23, FBF anstatt FBE.

Seite 250, 3te Zeile von unten, AD anstatt AC.

Seite 270, Zeile 20, AC anstatt BC.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burja, Abel, 1752-1816

Erleichterter Unterricht in der höheren Meßkunst, oder deutliche Anweisung zur Geometrie der krummen Linien

Bd.: 2

Berlin und Libau (1788)

Math.p. 61-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137655-7
VD18 80529100